

複雑ネットワーク

基礎から応用まで

増田直紀 今野紀雄

補遺 (PDF 版)

C o m p l e x N e t w o r k s



近代科学社

本補遺について

この補遺では、まず、本書に収録しなかった 3 つの項目を説明する。本書の該当箇所それぞれにおいて、本補遺を参照している。

最初の 2 つは、スケールフリー・ネットワークの 2 つのモデルに対するクラスター係数の計算である。これら 2 つのモデルは、生成されるネットワークがスモールワールドかつスケールフリーとなる例である。3 つ目は、ある中心性指標の紹介であり、ネットワーク上のランダム・ウォークの応用例として位置づけられる。ここでは、線形代数や電気回路の知識が効果的に用いられている。

最後に、本書の [63] 番以降の文献について、論文名つきの文献リストを掲載する。

本補遺が本書の理解の一助となれば幸いである。

増田直紀, 今野紀雄

本補遺の著作権は著者に属するが、無償でダウンロード可能である。内容を引用するときは、本補遺のタイトル (上記) を記すこと。

0.1 頂点非活性化モデルのクラスター係数の計算

時刻 t でネットワークに加入した頂点 v_t は、いずれ非活性化する。 v_t の各隣接点もいずれ非活性化する。それ以降は、 v_t と v_t の隣接点は新しい枝を受けとらないので、 v_t のクラスター係数は変化しなくなる。 v_t の最終的な次数を $k (\geq m)$ とする。各点のクラスター係数は k だけで決まるので、 k によって場合分けをする。

- $k = m$ ならば、図 S1 (A) に示すように、 v_t は加入直後に非活性化したことになる。 v_t に隣接する 2 頂点 v_a, v_b をランダムにとってきて、 v_t, v_a, v_b が三角形を成すかどうかを考える。 v_a と v_b は、新顔の v_t から枝を受けとったので、時刻 t 以前から活性化状態である。 v_a が v_b より古株だとする。 v_b が加入したとき、 v_a は活性化状態のはずである。その後 v_t が加入したときも、 v_a は活性化状態を保っているからである。したがって、 v_a と v_b の間には枝があり、 v_t, v_a, v_b は三角形を成す。 v_a と v_b の選び方は任意なので、 v_t のクラスター係数、あるいは、一般に $k = m$ となる点のクラスター係数は

$$C(k = m) = 1. \quad (\text{S1})$$

- $k = m + 1$ ならば、 v_t は時刻 t では活性化状態に留まって 1 本の枝を受けとり、時刻 $t + 1$ で非活性化する (図 S1 (B))。時刻 t に非活性化した頂点を v'_t と書く。図 S1 (B) に示すように、 v'_t は、時刻 $t + 1$ で新しい頂点 v_{t+1} から枝を受けとらない。 v_t の隣接点 $m + 1$ 個がなす対は $(m + 1)m/2$ 組あり、そのうち v_{t+1} と v'_t の間にだけ枝がないので、

$$C(k = m + 1) = \frac{(m + 1)m/2 - 1}{(m + 1)m/2}. \quad (\text{S2})$$

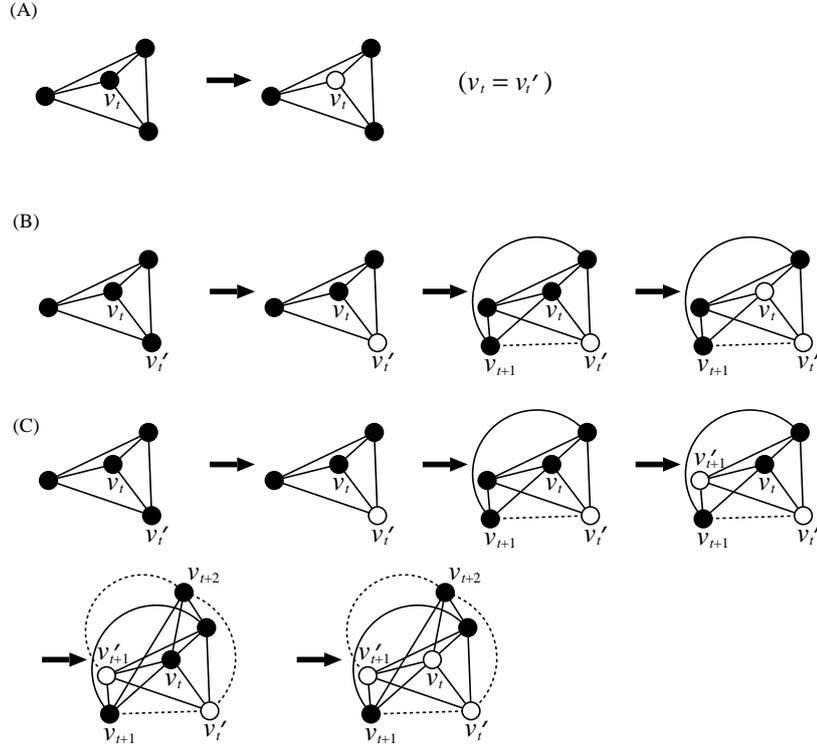


図 S1: 頂点非活性化モデルのクラスター係数の求め方 ($m = 3$)。 (A) $k = m$, (B) $k = m + 1$, (C) $k = m + 2$. 点線は実際にはない枝

- $k = m + 2$ ならば, 頂点 v_t は時刻 t と $t + 1$ では活性化状態に留まって 2 本の枝を受けとり, 時刻 $t + 2$ で非活性化する (図 S1 (C)). v_t の隣接点 $m + 2$ 個の頂点对 $(m + 2)(m + 1)/2$ 組の中で, 枝がないのは v_{t+1} と v'_t の間, v_{t+2} と v'_t の間, v_{t+2} と v'_{t+1} の間, の 3ヶ所なので

$$C(k = m + 2) = \frac{(m + 2)(m + 1)/2 - 3}{(m + 2)(m + 1)/2}. \quad (\text{S3})$$

- 一般に, 次数が $k = m + k'$ のときは, 頂点对 $(m + k')(m + k' - 1)/2$ 組のうち

$$\sum_{k''=1}^{k'} k'' = \frac{k'(k' + 1)}{2} \quad (\text{S4})$$

本の枝が欠けているので,

$$\begin{aligned} C(k) &= \frac{(m + k')(m + k' - 1)/2 - k'(k' + 1)/2}{(m + k')(m + k' - 1)/2} \\ &= 1 - \frac{(k - m + 1)(k - m)}{k(k - 1)} \\ &= \frac{(m - 1)(2k - m)}{k(k - 1)}. \end{aligned} \quad (\text{S5})$$

式 (S5) より, k が大きいところで $C(k) \propto k^{-1}$.
ネットワーク全体のクラスター係数は

$$C = \int_m^\infty C(k)p(k)dk. \quad (\text{S6})$$

例えば, $a = m$ のときは $C = 5/6$ となる。

0.2 閾値モデルのクラスター係数の計算

閾値モデルの $C(k)$ を求めるには, 次数が k である頂点 v を含む三角形の有無を知ればよい。図 S2 に示すように, v は 2 点 v' , v'' と隣接しているとする。 v' の重みを w' , v'' の重みを w'' とすると, $w + w' \geq \theta$, $w + w'' \geq \theta$ が必ず満たされている。このとき, v' と v'' の間に枝があれば, v を含む三角形ができる。このような枝がある確率が, v のクラスター係数 $C(k)$ である。

まず, ある頂点 v が重み w をもつとする。式 (7.19) (p.145) より, 次数は

$$k = N(1 - F(\theta - w)). \quad (\text{S7})$$

隣接点 v' で重みが w' , すなわち, 次数が

$$k' = N(1 - F(\theta - w')) \quad (\text{S8})$$

となるものの密度は, $w' \geq \theta - w$ なら $f(w')$ でそれ以外なら 0 である。 v' の重みが $\theta - w$ より小さいと枝 (v, v') 自体が存在しないからである。

枝 (v, v') はあるとして, v のもう 1 つの隣接点 v'' (重み w'') を考えるときに, v' と v'' の間に枝があるかどうかを調べる。まず, v'' が v と隣接すると仮定して出発するので $w + w'' \geq \theta$ である。

場合 1 $w' \geq w$ のときは

$$w' + w'' \geq w + w'' \geq \theta \quad (\text{S9})$$

なので, v' と v'' の間に必ず枝がある。この場合から三角形ができる確率は 1 である。

場合 2 $\theta - w \leq w' < w$ ($k' < k$) のときは, $w' + w'' \geq \theta$ が成立するときだけ v' と v'' が隣接する。 $w'' < \theta - w'$ ならば隣接しない。したがって, この場合から三角形ができる確率は

$$\frac{\int_{\theta-w'}^\infty f(w'')dw''}{\int_{\theta-w}^\infty f(w'')dw''} = \frac{1 - F(\theta - w')}{1 - F(\theta - w)}. \quad (\text{S10})$$

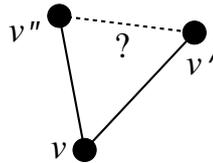


図 S2: 閾値モデルのクラスター係数の求め方

元の頂点 v に戻ろう。 $w > \theta/2$, すなわち $k > N(1 - F(\theta/2))$ のときは, 場合 1 と場合 2 の両方が起こりうる。このとき, w を k で書き表す途中計算を少し省略するが,

$$\begin{aligned} C(k) &= \frac{\int_w^\infty 1 \times f(w')dw' + \int_{\theta-w}^w \frac{1-F(\theta-w')}{1-F(\theta-w)} f(w')dw'}{\int_{\theta-w}^\infty f(w')dw'} \\ &= \frac{\int_{\theta-F^{-1}(1-k/N)}^\infty p(k')dk' + \frac{1}{k} \int_{F^{-1}(1-k/N)}^{\theta-F^{-1}(1-k/N)} k'p(k')dk'}{\int_{F^{-1}(1-k/N)}^\infty p(k')dk'}. \end{aligned} \quad (\text{S11})$$

分子の最初の積分が場合 1, 2 つめの積分が場合 2 に対応する。

$w \leq \theta/2$ のとき, すなわち, $k \leq N(1 - F(\theta/2))$ のとき, 場合 2 ($w' < w$) からは三角形ができない。 $w + w' < \theta$ なので, v と v' がそもそも隣接しないからである。よって場合 1 だけを考慮して

$$C(k) = 1. \quad (\text{S12})$$

式 (S11) と式 (S12) から計算すると, 重みが指数分布に従う, すなわち,

$$f(w) = \lambda e^{-\lambda w} \quad (w \geq 0) \quad (\text{S13})$$

のときは

$$C(k) \propto k^{-2}. \quad (\text{S14})$$

重みがべき則に従う, すなわち,

$$f(w) = \frac{a}{w_{\min}} \left(\frac{w_{\min}}{w} \right)^{a+1} \quad (w \geq w_{\min}) \quad (\text{S15})$$

のときは,

$$C(k) \propto k^{-1}. \quad (\text{S16})$$

式 (S16) は, 階層的モデルの結果 (6.8 節) と同じである。

最後に, ネットワーク全体のクラスター係数は

$$C = \int_0^\infty C(k)p(k)dk \quad (\text{S17})$$

から求まる。例えば, $f(w)$ が指数分布のとき, $\lim_{N \rightarrow \infty} C > 0$ となる。

0.3 ランダム・ウォーク媒介中心性

媒介中心性は, 最もよく使われる中心性の指標の 1 つである。しかし, 情報の流れを媒介するという本来の目的に限っても, 直観とずれる値を与えることがある。

図 S3 を見てみよう。最短路がたくさん通る頂点が大きな媒介中心性をもつから, v_1 と v_2 の媒介中心性は大きい。左コミュニティの頂点と右コミュニティの頂点を結ぶ最短路は, 必ず v_1, v_2 を通るからである。そのような最短路は, 決して v_3 を通らない。 v_3 を通る迂回路は, 最短路よりも 1 だけ距離が長いからである。よって, v_3 の媒介中心性は小さい。ただ, v_3 は, v_1 や v_2 に及ばないとしても他の大多数の頂点よりは重要そうに見える。

この違和感の由来は、9.2.4 節で与えられている。スモールワールド実験の場合と同様に、多くの実用においては最短路がわからないのである。よって、最短路より少しだけ長い経路も、それなりに情報伝達に役立っているはずだ。そこで、最短路以外の経路上にいる頂点にも、それなりの得点を与えるように媒介中心性を変更してみる。その極端な場合として、最短路を通るウォークの代わりに、単純ランダム・ウォークを考える。頂点がゴールや隣接点についての情報を全くもたない場合である。伝達効率が悪いランダム・ウォークを用いることによって、最短でない道の上にいる人にも中心性の部分点が与えられてちょうどよい。これがランダム・ウォーク中心性の考え方である [174,178]。

枝に方向がないとする。媒介中心性の定義と同様に始点 v_{i_s} とゴール v_{i_t} を定める。有限ネットワークなので、ランダム・ウォーカーはいずれ v_{i_t} に到達する（無限ネットワークで再帰的でない場合、そうとは限らない）。 v_{i_s} から v_{i_t} に着くまでに、同じ頂点を 2 回以上通ることもある。ともあれ、媒介中心性のときと同様に、ウォーカーが v を通る回数を数えて中心性の値を定義する。

もし v_{i_t} を定めずにウォーカーが永久にネットワーク内を歩き続けると、ウォーカーが頂点 v を通る回数は次数に比例する (9.2.1 節)。ところが、ゴールありきのウォークを考えるので、長すぎるウォークの中心性への寄与は小さくなる。 v_{i_t} に到達せずにネットワークの中を長くさまようウォークは起こりにくいからである。一方、最短路だけを数えるわけではなく、最短路よりいくらか長い経路も、それなりに中心性の向上に寄与する。

v_i のランダム・ウォーク（媒介）中心性を

$$b_i^{\text{rw}} \propto \sum_{i_s=1}^N \sum_{i_t=1}^{i_s-1} (v_{i_s} \text{ から } v_{i_t} \text{ へ行くウォーカーが } v_i \text{ を本質的に通る平均回数}) \quad (\text{S18})$$

で定める [174]。本質的に通過する回数、の意味は後で説明する。実は、ネットワーク上のランダム・ウォークは、ネットワーク上の電気回路とうまく対応する [142]。そこで、遠回りになるようだが、電気回路に基づく中心性を先に考え、実はその中心性がランダム・ウォーク中心性に等しいことを確認する、という手順で考える。

ランダム・ウォークの始点 v_{i_s} に電流 1 が入り、ゴール v_{i_t} から電流 1 が出るとする。各枝にはコンダクタンス（抵抗の逆数）1 が乗っていて、大雑把には v_{i_s} から v_{i_t} に向かって電流が流れているとする。

頂点 v_i の電位を V_i と書く。各点 v_i におけるキルヒホッフの電流保存則より

$$\sum_{j=1}^N A_{ij}(V_i - V_j) = \delta_{i,i_s} - \delta_{i,i_t}. \quad (\text{S19})$$

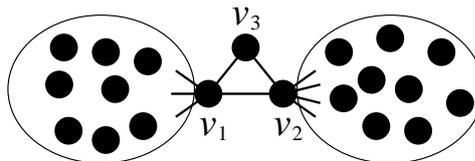


図 S3: 媒介中心性では、 v_3 の中心性はとても小さい

$A_{ij}(V_i - V_j)$ は、 v_i から v_j に流れる電流である。 (A_{ij}) は隣接行列なので、式 (S19) の左辺は、実質的には v_i に隣接する v_j についてのみの和である。右辺は $i \neq i_s, i_t$ である限り 0 となり、 v_{i_s} と v_{i_t} を除いては、電流の出る量と入る量が釣り合っていることを表す。

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} = k_i \quad (\text{S20})$$

より、式 (S19) を行列とベクトルで書き直すと

$$(D - A)\mathbf{V} = \bar{\mathbf{I}}. \quad (\text{S21})$$

ここで、 D は、 i 番目の対角成分は k_i である $N \times N$ 対角行列である。 $D - A$ はラプラシアン行列と呼ばれる。 $\mathbf{V} = (V_1 \cdots V_N)^\top$ は、各頂点の電位を並べた縦ベクトルであり (\top は転置を表す)、これを求めたい。 $\bar{\mathbf{I}}$ は N 次元縦ベクトルで

$$\bar{I}_i = \begin{cases} 1, & (i = i_s), \\ -1, & (i = i_t), \\ 0, & (i \neq i_s, i_t). \end{cases} \quad (\text{S22})$$

各点の電位 \mathbf{V} は、式 (S21) に $D - A$ の逆行列を左からかければ直ちに求まるかのように見える。しかし、 $D - A$ は正則でない。 $(1 \ 1 \ \cdots \ 1)^\top$ が $D - A$ の固有値 0 に対応する固有ベクトルだからである。これは、電位が相対的な概念であることの現れである。つまり、ある 1 点の電位を例えば 0 と定義すると、そこから相対的に他の $N - 1$ 点の電位が求まる。全ての点の電位に同一の定数を足してもよい。この任意性のために、式 (S21) だけから \mathbf{V} を一意的に定めることができない。

そこで、式 (S21) から任意の 1 行 i_0 を除去する。これは、 $V_{i_0} = 0$ と置くことに対応する。 D と A から第 i_0 行と第 i_0 列を除去し、その結果 $D - A$ からできた $(N - 1) \times (N - 1)$ 行列を $D_{i_0} - A_{i_0}$ と置く。 V_{i_0} を除去した \mathbf{V} を \mathbf{V}_{i_0} 、 I_{i_0} を除去した $\bar{\mathbf{I}}$ を $\bar{\mathbf{I}}_{i_0}$ と書く。式 (S21) から 1 行を除去してできた

$$(D_{i_0} - A_{i_0})\mathbf{V}_{i_0} = \bar{\mathbf{I}}_{i_0} \quad (\text{S23})$$

は、 $N - 1$ 次元連立線形方程式である。ネットワークが連結である限り、行列 $D_{i_0} - A_{i_0}$ は正則である。よって、

$$\mathbf{V}_{i_0} = (D_{i_0} - A_{i_0})^{-1}\bar{\mathbf{I}}_{i_0}. \quad (\text{S24})$$

ここで、 $(D_{i_0} - A_{i_0})^{-1}$ にゼロで埋められた第 i_0 行と第 i_0 列を戻してできる $N \times N$ 行列を T 、 T の第 i 行第 j 列成分を $T_{i,j}$ と書く。式 (S22) を式 (S24) に代入して

$$V_i = T_{i,i_s} - T_{i,i_t}. \quad (\text{S25})$$

式 (S25) は $V_{i_0} = 0$ を満たすことに注意する。

頂点 v_i を流れる総電流は

$$I_i = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N A_{ij} |V_i - V_j| = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N A_{ij} |T_{i,i_s} - T_{i,i_t} - T_{j,i_s} + T_{j,i_t}|, & (i \neq i_s, i_t), \\ 1, & (i = i_s, i_t). \end{cases} \quad (\text{S26})$$

$i \neq i_s, i_t$ のときの右辺を 2 で割るのは、同じ電流を v_i に入る分と出る分で 2 回数えているからである。

式 (S26) は、特定の始点 v_{i_s} とゴール v_{i_t} に対する結果である。そこで、式 (S26) の I_i を始点とゴールを明示して $I_i^{(i_s, i_t)}$ と書き、頂点 v_i のランダム・ウォーク中心性を

$$b_i^{\text{rw}} = \frac{\sum_{i_s=1}^N \sum_{i_t=1}^{i_t-1} I_i^{(i_s, i_t)}}{N(N-1)/2} \quad (\text{S27})$$

で定義する。電流が出入りしやすい頂点を中心、という基準である。

実は、式 (S27) は、ランダム・ウォークが頂点に訪れる程度を表す。それを見るために、ランダム・ウォークに話を戻す。ランダム・ウォークの推移確率行列は式 (9.4) (p.205) で与えられる。これはゴールがない場合である。ゴール v_{i_t} がある場合に、 v_i にいるウォーカーが v_j に移動する確率は

$$B'_{ij} = \begin{cases} \frac{A_{ij}}{k_i}, & (i \neq i_t), \\ \delta_{i_t, j}, & (i = i_t). \end{cases} \quad (\text{S28})$$

$\delta_{i_t, j}$ は $i_t = j$ なら 1, $i_t \neq j$ なら 0 である。式 (S28) は、ウォーカーがゴール v_{i_t} に到達したら、それ以降の時刻では v_{i_t} に留まり続けることを表す。

行列で書くと、第 i_t 行以外については B' は $D^{-1}A$ と等しい。そこで、 B' , D^{-1} , A のそれぞれから行 i_t と列 i_t を除くと、

$$B'_{i_t} = D_{i_t}^{-1} A_{i_t} \quad (\text{S29})$$

となる。 B'_{i_t} , D_{i_t} , A_{i_t} は、それぞれ $(N-1) \times (N-1)$ 行列であり、 D_{i_t} , A_{i_t} は D_{i_0} , A_{i_0} で $i_0 = i_t$ と選んだものである。 B' の各行について、和が 1 より小さい場合は、残りの確率でウォーカーが v_{i_t} に吸収されたと思えばよい。

v_{i_s} から出発するランダム・ウォークを考える。ウォーカーが時刻 T で v_i ($i \neq i_t$) にいる確率は $(B'_{i_t})^T$ の第 i_s 行第 i 列の値である。さらに次の時刻で隣接点 v_j へ行く確率は、これを k_i で割ったものである。よって、ウォーカーが $v_i \rightarrow v_j$ の向きにこの枝を通る回数の期待値は、 $(N-1)$ 次元単位行列 E を用いて

$$\begin{aligned} \sum_{T=0}^{\infty} \frac{(B'_{i_t})^T \text{の第 } i_s \text{ 行第 } i \text{ 列}}{k_i} &= \frac{[E - B'_{i_t}]^{-1} \text{の第 } i_s \text{ 行第 } i \text{ 列}}{k_i} \\ &= \bar{\mathbf{I}}_{i_t}^{\top} (E - D_{i_t}^{-1} A_{i_t})^{-1} D_{i_t}^{-1} \text{の第 } i \text{ 成分} \\ &= \bar{\mathbf{I}}_{i_t}^{\top} (D_{i_t} - A_{i_t})^{-1} \text{の第 } i \text{ 成分}. \end{aligned} \quad (\text{S30})$$

D_{i_t} と A_{i_t} は対称行列なので、式 (S30) の量は $(\bar{\mathbf{I}}_{i_t}^{\top} (D_{i_t} - A_{i_t})^{-1})^{\top} = (D_{i_t} - A_{i_t})^{-1} \bar{\mathbf{I}}_{i_t}$ の第 i 行目の成分と同一である。よって、式 (S24) より、式 (S30) の量は、 i_0 として i_t を選んだときの電位 V_i に等しい。ここでランダム・ウォークが電気回路と結びつくのである。式 (S30) は v_j によらないことに注意する。 v_i にいれば、次のステップでは任意の隣接点に確率 $1/k_i$ で移動する。結局、 v_i を訪れやすいほど $v_i \rightarrow v_j$ の方向にこの枝を通りやすい。

ウォーカーが v_{i_s} から v_{i_t} に到達するまでに $v_i \rightarrow v_j$ と移動する「実質的な」回数、すなわち、 $v_i \rightarrow v_j$ と移動する回数から $v_j \rightarrow v_i$ と移動する回数を引いたものは $|V_i - V_j|$ である。後は、始点 v_{i_s} とゴール v_{i_t} について平均化すればよく、その部分は、式 (S26) から式 (S27) を導く部分と同一である。

注意として、ウォーカーが v_i を通過する回数そのものは、式 (S30) より、 $k_i V_i$ である (V_i は i_s と i_t に依存する)。 b_i^{rw} は、これとは等しくない。例えば、 $v_i \rightarrow v_j \rightarrow v_i \rightarrow v_j \rightarrow v_i \rightarrow \dots$ といった動きは、ウォーカーが v_i や枝 (v_i, v_j) を通る回数としては数えるが、ランダム・ウォーク中心性では、 $v_i \rightarrow v_j$ と $v_j \rightarrow v_i$ が打ち消しあうと見なして数えない。これにより b_i^{rw} と電気回路の対応づけが可能になっている。

最後に、1つの i に対する式 (S27) の評価に $O(MN)$ 、逆行列の計算に $O(N^3)$ の計算時間がかかる。よって、全ての頂点の b_i^{rw} を計算するには、 $O((M+N)N^2)$ の時間がかかる。平均次数が大きくないなら $O(N^3)$ である。いずれにせよ、速い方ではない。

論文名つきの文献リスト

- [63] Albert, R., Jeong, H., Barabási, A. -L. : Error and attack tolerance of complex networks. *Nature*, Vol. 406, pp. 378–382 (2000).
- [64] Anderson, R. M., Medley, G. F., May, R. M., Johnson, A. M. : A preliminary study of the transmission dynamics of the human immunodeficiency virus (HIV), the causative agent of AIDS. *IMA Journal of Mathematics Applied in Medicine & Biology*, Vol. 3, pp. 229–263 (1986).
- [65] Arenas, A., Díaz-Guimera, A., Pérez-Vicente, C. J. : Synchronization reveals topological scales in complex networks. *Physical Review Letters*, Vol. 96, article No. 114102 (2006).
- [66] Axelrod, R. : *Evolution of Cooperation*, Basic Books (1984). R. アクセルロッド著 (松田裕之訳) : 『つきあい方の科学 — バクテリアから国際関係まで』, ミネルヴァ書房 (1998).
- [67] Ball, F., Mollison, D., Scalia-Tomba, G. : Epidemics with two levels of mixing. *Annals of Applied Probability*, Vol. 7, pp. 46–89 (1997).
- [68] Barabási, A. -L., Albert, R. : Emergence of scaling in random networks. *Science*, Vol. 286, pp. 509–512 (1999).
- [69] Barabási, A. -L., Albert, R., Jeong, H. : Mean-field theory for scale-free random networks. *Physica A*, Vol. 272, pp. 173–187 (1999).
- [70] Barabási, A. -L., Ravasz, E., Vicsek, T. : Deterministic scale-free networks. *Physica A*, Vol. 299, pp. 559–564 (2001).
- [71] Barahona, M., Pecora, L. M. : Synchronization in small-world systems. *Physical Review Letters*, Vol. 89, article No. 054101 (2002).
- [72] Barbour, A. D., Reinert, G. : Small worlds. *Random Structures and Algorithms*, Vol. 19, pp. 54–74 (2001).
- [73] Barrat, A., Weigt, M. : On the properties of small-world network models. *European Physical Journal B*, Vol. 13, pp. 547–560 (2000).
- [74] Barrat, A., Pastor-Satorras, R. : Rate equation approach for correlations in growing network models. *Physical Review E*, Vol. 71, article No. 036127 (2005).

- [75] Barthélemy, M., Barrat, A., Pastor-Satorras, R., Vespignani, A. : Velocity and hierarchical spread of epidemic outbreaks in scale-free networks. *Physical Review Letters*, Vol. 92, article No. 178701 (2004).
- [76] Barthélemy, M., Barrat, A., Pastor-Satorras, R., Vespignani, A. : Dynamical patterns of epidemic outbreaks in complex heterogeneous networks. *Journal of Theoretical Biology*, Vol. 235, pp. 275–288 (2005).
- [77] Benjamini, I., Kesten, H., Peres, Y., Schramm, O. : Geometry of the uniform spanning forest: transitions in dimensions 4, 8, 12, ... *Annals of Mathematics*, Vol. 160, pp. 465–491 (2004).
- [78] Bergeron, F., Flajolet, P., Salvy, B. : Varieties of increasing trees. *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 581, pp. 24–48 (1992).
- [79] Bianconi, G., Barabási, A. -L. : Competition and multiscaling in evolving networks. *Europhysics Letters*, Vol. 54, pp. 436–442 (2001).
- [80] Bianconi, G., Barabási, A. -L. : Bose-Einstein condensation in complex networks. *Physical Review Letters*, Vol. 86, pp. 5632–5635 (2001).
- [81] Biskup, M. : On the scaling of the chemical distance in long-range percolation models. *Annals of Probability*, Vol. 32, pp. 2938–2977 (2004).
- [82] Boguñá, M., Pastor-Satorras, R. : Class of correlated random networks with hidden variables. *Physical Review E*, Vol. 68, article No. 036112 (2003).
- [83] Bollobás, B., Chung, F. R. K. : The diameter of a cycle plus a random matching. *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, Vol. 1, pp. 328–333 (1988).
- [84] Bollobás, B., Riordan, O. : The diameter of a scale-free random graph. *Combinatorica*, Vol. 24, pp. 5–34 (2004).
- [85] Bonacich, P. : Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification. *Journal of Mathematical Sociology*, Vol. 2, pp. 113–120 (1972).
- [86] Brandes, U. : A faster algorithm for betweenness centrality. *Journal of Mathematical Sociology*, Vol. 25, pp. 163–177 (2001).
- [87] Bullmore, E., Sporns, O. : Complex brain networks: graph theoretical analysis of structural and functional systems. *Nature Reviews Neuroscience*, Vol. 10, pp. 186–198 (2009).
- [88] Caldarelli, G., Capocci, A., De Los Rios, P., Muñoz M. A. : Scale-free networks from varying vertex intrinsic fitness. *Physical Review Letters*, Vol. 89, article No. 258702 (2002).
- [89] Callaway, D. S., Newman, M. E. J., Strogatz, S. H., Watts, D. J. : Network robustness and fragility: percolation on random graphs. *Physical Review Letters*, Vol. 85, pp. 5468–5471 (2000).

- [90] Catanzaro, M., Pastor-Satorras, R. : Analytic solution of a static scale-free network model. *European Physical Journal B*, Vol. 44, pp. 241–248 (2005).
- [91] Chung, F., Lu, L. : The average distances in random graphs with given expected degrees. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 99, pp. 15879–15882 (2002).
- [92] Chung, F., Lu, L., Vu, V. : Spectra of random graphs with given expected degrees. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 100, pp. 6313–6318 (2003).
- [93] Clauset, A., Newman, M. E. J., Moore, C. : Finding community structure in very large networks. *Physical Review E*, Vol. 70, article No. 066111 (2004).
- [94] Clauset, A., Shalizi, C. R., Newman, M. E. J. : Power-law distributions in empirical data. *SIAM Review*, Vol. 51, pp. 661–703 (2009).
- [95] Cohen, R., Erez, K., ben-Avraham, D., Havlin, S. : Resilience of the Internet to random breakdowns. *Physical Review Letters*, Vol. 85, pp. 4626–4628 (2000).
- [96] Cohen, R., Erez, K., ben-Avraham, D., Havlin, S. : Breakdown of the Internet under intentional attack. *Physical Review Letters*, Vol. 86, pp. 3682–3685 (2001).
- [97] Cohen, R., ben-Avraham, D., Havlin, S. : Percolation critical exponents in scale-free networks. *Physical Review E*, Vol. 66, article No. 036113 (2002).
- [98] Cohen, R., Havlin, S. : Scale-free networks are ultrasmall. *Physical Review Letters*, Vol. 90, article No. 058701 (2003).
- [99] Cohen, R., Havlin, S., ben-Avraham, D. : Efficient immunization strategies for computer networks and populations. *Physical Review Letters*, Vol. 91, article No. 247901 (2003).
- [100] Coppersmith, D., Gamarnik, D., Sviridenko, M. : The diameter of a long-range percolation graph. *Random Structures and Algorithms*, Vol. 21, pp. 1–13 (2002).
- [101] Donetti, L., Hurtado, P. I., Muñoz, M. A. : Entangled networks, synchronization, and optimal network topology. *Physical Review Letters*, Vol. 95, article No. 188701 (2005).
- [102] Dorogovtsev, S. N., Mendes, J. F. F., Samukhin, A. N. : Structure of growing networks with preferential linking. *Physical Review Letters*, Vol. 85, pp. 4633–4636 (2000).
- [103] Dorogovtsev, S. N., Goltsev, A. V., Mendes, J. F. F. : Pseudofractal scale-free web. *Physical Review E*, Vol. 65, article No. 066122 (2002).
- [104] Dorogovtsev, S. N., Goltsev, A. V., Mendes, J. F. F., Samukhin, A. N. : Spectra of complex networks. *Physical Review E*, Vol. 68, article No. 046109 (2003).

- [105] Draief, M., Ganesh, A. : Efficient routing in poisson small-world networks. *Journal of Applied Probability*, Vol. 43, pp. 678–686 (2006).
- [106] Durán, O., Mulet, R. : Evolutionary prisoner’s dilemma in random graphs, *Physica D*, Vol. 208, pp. 257–265 (2005).
- [107] Ebel, H., Mielsch, L. -I., Bornholdt, S. : Scale-free topology of e-mail networks. *Physical Review E*, Vol. 66, article No. 035103(R) (2002).
- [108] Eguíluz, V. M., Klemm, K. : Epidemic threshold in structured scale-free networks. *Physical Review Letters*, Vol. 89, article No. 108701 (2002).
- [109] Farkas, I. J., Derényi, I. Barabási, A. -L., Vicsek, T. : Spectra of “real-world” graphs: beyond the semicircle law. *Physical Review E*, Vol. 64, article No. 026704 (2001).
- [110] Fortunato, S. : Community detection in graphs. *Physics Reports*, Vol. 486, pp. 75–174 (2010).
- [111] Franceschetti, M., Meester, R. : Navigation in small-world networks: a scale-free continuum model. *Journal of Applied Probability*, Vol. 43, pp. 1173–1180 (2006).
- [112] Franceschetti, M., Meester, R. : *Random networks for communication — From statistical physics to information systems*, Cambridge University Press (2007).
- [113] Freeman, L. C. : Centrality in social networks conceptual clarification. *Social Networks*, Vol. 1, pp. 215–239 (1979).
- [114] Galarreta, M., Hestrin, S. : Electrical synapses between GABA-releasing interneurons. *Nature Reviews Neuroscience*, Vol. 2, pp. 425–433 (2001).
- [115] Girvan, M., Newman, M. E. J. : Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 99, pp. 7821–7826 (2002).
- [116] Goh, K. -I., Kahng, B., Kim, D. : Universal behavior of load distribution in scale-free networks. *Physical Review Letters*, Vol. 87, article No. 278701 (2001).
- [117] Goh, K. -I., Kahng, B., Kim, D. : Spectra and eigenvectors of scale-free networks. *Physical Review E*, Vol. 64, article No. 051903 (2001).
- [118] Grassberger, P. : On the critical behavior of the general epidemic process and dynamical percolation. *Mathematical Biosciences*, Vol. 63, pp. 157–172 (1983).
- [119] Hethcote, H. W., Yorke, J. A. : Gonorrhoea transmission dynamics and control. *Lecture Notes in Biomathematics*, Vol. 56, pp. 1–105 (1984).
- [120] Holme, P., Kim, B. J. : Growing scale-free networks with tunable clustering. *Physical Review E*, Vol. 65, article No. 026107 (2002).

- [121] Ichinomiya, T. : Frequency synchronization in a random oscillator network. *Physical Review E*, Vol. 70, article No. 026116 (2004).
- [122] Ichinomiya, T. : Path-integral approach to dynamics in a sparse random network. *Physical Review E*, Vol. 72, article No. 016109 (2005).
- [123] 稲水伸行, 竹嶋斎 : ネットワーク可視化の技法 — Pajek の使い方. 『赤門マネジメント・レビュー』, Vol. 4, pp. 281–302 (2005).
- [124] Jeong, H., Tombor, B., Albert, R., Oltvai, Z. N., Barabási, A. -L. : The large-scale organization of metabolic networks. *Nature*, Vol. 407, pp. 651–654 (2000).
- [125] Jeong, H., Mason, S. P., Barabási, A. -L., Oltvai, Z. N. : Lethality and centrality in protein networks. *Nature*, Vol. 411, pp. 41–42 (2001).
- [126] 香取眞理 : 『複雑系を解く確率モデル — こんな秩序が自然を操る』, 講談社 (1997).
- [127] Keeling, M. J., Eames, K. T. D. : Networks and epidemic models. *Journal of the Royal Society Interface*, Vol. 2, pp. 295–307 (2005).
- [128] Kermack, W. O., McKendrick, A. G. : A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the Royal Society of London A*, Vol. 115, pp. 700–721 (1927).
- [129] Kleinberg, J. M. : Authoritative sources in a hyperlinked environment. in *Proceedings of the 9th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 668–677 (1998). ([?] は, この文献と同じ表題の拡張版)
- [130] Kleinberg, J. M. : Authoritative sources in a hyperlinked environment. *Journal of the ACM*, Vol. 46, pp. 604–632 (1999).
- [131] Kleinberg, J. M., Kumar, R., Raghavan, P., Rajagopalan, S., Tomkins, A. S. : The web as a graph: Measurements, models, and methods. *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 1627, pp. 1–17 (1999).
- [132] Kleinberg, J. M. : Navigation in a small world. *Nature*, Vol. 406, pp. 845 (2000).
- [133] Kleinberg, J. : The small-world phenomenon: an algorithmic perspective. in *Proceedings of the 32nd ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 163–170 (2000).
- [134] Kleinberg, J. : Small-world phenomena and the dynamics of information. in *Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS)*, Vol. 14, pp. 431–438 (2001).
- [135] Kleinberg, J. Complex networks and decentralized search algorithms. in *Proceedings of the International Congress of Mathematics*, Vol. 3, pp. 1019–1044 (2006).
- [136] Klemm, K., Eguíluz, V. M. : Highly clustered scale-free networks. *Physical Review E*, Vol. 65, article No. 036123 (2002).

- [137] Klemm, K., Eguíluz, V. M. : Growing scale-free networks with small-world behavior. *Physical Review E*, Vol. 65, article No. 057102 (2002).
- [138] 今野紀雄 : 『無限粒子系の科学』, 講談社 (2008).
- [139] Krapivsky, P. L., Redner, S., Leyvraz, F. : Connectivity of growing random networks. *Physical Review Letters*, Vol. 85, pp. 4629–4632 (2000).
- [140] Krapivsky, P. L., Redner, S. : Organization of growing random networks. *Physical Review E*, Vol. 63, article No. 066123 (2001).
- [141] Krapivsky, P. L., Redner, S. : Network growth by copying. *Physical Review E*, Vol. 71, article No. 036118 (2005).
- [142] 熊谷隆 : 『確率論』, 共立出版 (2003). の第 3 章
- [143] Kumar, R., Raghavan, P., Rajagopalan, S., Sivakumar, D., Tomkins, A. S., Upfal, E. : Stochastic models for the web graph. in *Proceedings of the 41st Annual IEEE Symposium on the Foundations of Computer Science*, pp. 57–65 (2000).
- [144] Kuperman, M., Abramson, G. : Small world effect in an epidemiological model. *Physical Review Letters*, Vol. 86, pp. 2909–2912 (2001).
- [145] Kuramoto, Y. : *Chemical oscillations, waves, and turbulence*, Springer-Verlag (1984). Dover Publications から再版 (2003).
- [146] 蔵本由紀編 : 『リズム現象の世界』, 東京大学出版会 (2005).
- [147] Langville, A. N., Meyer, C. D. : *Google's PageRank and beyond — The science of search engine rankings*, Princeton University Press (2006). 岩野和生, 黒川利明, 黒川洋訳 : 『Google PageRank の数理 — 最強検索エンジンのランキング手法を求めて』, 共立出版 (2009).
- [148] Lee, D. -S. : Synchronization transition in scale-free networks: clusters of synchrony. *Physical Review E*, Vol. 72, article No. 026208 (2005).
- [149] Liggett, T. M. : *Interacting particle systems*, Springer (1985).
- [150] Liljeros, F., Edling, C. R., Amaral, L. A. N., Stanley, H. E., Åberg, Y. : The web of human sexual contacts. *Nature*, Vol. 411, pp. 907–908 (2001).
- [151] Mahmoud, H. M., Smythe, R. T., Szymański, J. : On the structure of random plane-oriented recursive trees and their branches. *Random Structures and Algorithms*, Vol. 4, pp. 151–176 (1993).
- [152] Manrubia, S. C., Mikhailov, A. S., Zanette, D. H. : Emergence of dynamical order — Synchronization phenomena in complex systems. World Scientific (2004). の第 4 章

- [153] Masuda, N., Miwa, H., Konno, N. : Analysis of scale-free networks based on a threshold graph with intrinsic vertex weights. *Physical Review E*, Vol. 70, article No. 036124 (2004).
- [154] Masuda, N. : Participation costs dismiss the advantage of heterogeneous networks in evolution of cooperation, *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, Vol. 274, pp. 1815–1821 (2007).
- [155] Masuda, N., Ohtsuki, H. : Evolutionary dynamics and fixation probabilities in directed networks. *New Journal of Physics*, Vol. 11, article No. 033012 (2009).
- [156] May, R. M., Anderson, R. M. : The transmission dynamics of human immunodeficiency virus (HIV). *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B*, Vol. 321, pp. 565–607 (1988).
- [157] May, R. M., Lloyd, A. L. : Infection dynamics on scale-free networks. *Physical Review E*, Vol. 64, article No. 066112 (2001).
- [158] Milo, R., Shen-Orr, S., Itzkovitz, S., Kashtan, N., Chklovskii, D., Alon, U. : Network motifs: simple building blocks of complex networks. *Science*, Vol. 298, pp. 824–827 (2002).
- [159] Milo, R., Itzkovitz, S., Kashtan, N., Levitt, R., Shen-Orr, S., Ayzenshtat, I., Sheffer, M., Alon, U. : Superfamilies of evolved and designed networks. *Science*, Vol. 303, pp. 1538–1542 (2004).
- [160] 宮下直, 野田隆史 : 『群集生態学』, 東京大学出版会 (2003). の第 5 章
- [161] Moore, C., Newman, M. E. J. : Epidemics and percolation in small-world networks. *Physical Review E*, Vol. 61, pp. 5678–5682 (2000).
- [162] Moore, C., Newman, M. E. J. : Exact solution of site and bond percolation on small-world networks. *Physical Review E*, Vol. 62, pp. 7059–7064 (2000).
- [163] Moreno, Y., Pastor-Satorras, R., Vespignani, A. : Epidemic outbreaks in complex heterogeneous networks. *European Physical Journal B*, Vol. 26, pp. 521–529 (2002).
- [164] Motter, A. E., Lai, Y. -C. : Cascade-based attacks on complex networks. *Physical Review E*, Vol. 66, article No. 065102(R) (2002).
- [165] Motter, A. E. : Cascade control and defense in complex networks. *Physical Review Letters*, Vol. 93, article No. 098701 (2004).
- [166] Motter, A. E., Zhou, C., Kurths, J. : Network synchronization, diffusion, and the paradox of heterogeneity. *Physical Review E*, Vol. 71, article No. 016116 (2005).
- [167] Motter, A. E., Zhou, C. S., Kurths, J. : Enhancing complex-network synchronization. *Europhysics Letters*, Vol. 69, pp. 334–340 (2005).

- [168] Newman, M. E. J., Moore, C., Watts, D. J. : Mean-field solution of the small-world network model. *Physical Review Letters*, Vol. 84, pp. 3201–3204 (2000).
- [169] Newman, M. E. J., Strogatz, S. H., Watts, D. J. : Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. *Physical Review E*, Vol. 64, article No. 026118 (2001).
- [170] Newman, M. E. J. : Assortative mixing in networks. *Physical Review Letters*, Vol. 89, article No. 208701 (2002).
- [171] Newman, M. E. J. : Spread of epidemic disease on networks. *Physical Review E*, Vol. 66, article No. 016128 (2002).
- [172] Newman, M. E. J. : Fast algorithm for detecting community structure in networks. *Physical Review E*, Vol. 69, article No. 066133 (2004).
- [173] Newman, M. E. J., Girvan, M. : Finding and evaluating community structure in networks. *Physical Review E*, Vol. 69, article No. 026113 (2004).
- [174] Newman, M. E. J. : A measure of betweenness centrality based on random walks. *Social Networks*, Vol. 27, pp. 39–54 (2005).
- [175] Newman, M. E. J. : Finding community structure in networks using the eigenvectors of matrices. *Physical Review E*, Vol. 74, article No. 036104 (2006).
- [176] Nishikawa, T., Motter, A. E., Lai, Y. -C., Hoppensteadt, F. C. : Heterogeneity in oscillator networks: are smaller worlds easier to synchronize? *Physical Review Letters*, Vol. 91, article No. 014101 (2003).
- [177] Nishikawa, T., Motter, A. E. : Maximum performance at minimum cost in network synchronization. *Physica D*, Vol. 224, pp. 77–89 (2006).
- [178] Noh, J. D., Rieger, H. : Random walks on complex networks. *Physical Review Letters*, Vol. 92, article No. 118701 (2004).
- [179] de Nooy, W., Mrvar, A., Batagelj, V. : *Exploratory social network analysis with Pajek*, Cambridge University Press (2005). ウオウター・デノーイ, アンドレイ・ムルヴァル, ヴラディミール・バタゲーリ (安田雪監訳) : 『Pajek を活用した社会ネットワーク分析』, 東京電機大学出版局 (2009).
- [180] Nowak, M. A., May, R. M. : Evolutionary games and spatial chaos. *Nature*, Vol. 359, pp. 826–829 (1992).
- [181] Nowak, M. A. : *Evolutionary dynamics — Exploring the equations of life*, The Belknap Press of Harvard University Press (2006). 中岡慎治, 巖佐庸, 竹内康博, 佐藤一憲訳 : 『進化のダイナミクス — 生命の謎を解き明かす方程式』, 共立出版 (2008).
- [182] 小田垣孝 : 『パーコレーションの科学』, 裳華房 (1993).

- [183] 小田垣孝：『つながりの科学 — パーコレーション』，裳華房 (2000).
- [184] 大串隆之，近藤倫生，難波利幸編：『生物間ネットワークを紐とく』，京都大学学術出版会 (2009).
- [185] Ohtsuki, H., Hauert, C., Lieberman, E., Nowak, M. A. : A simple rule for the evolution of cooperation on graphs and social networks. *Nature*, Vol. 441, pp. 502–505 (2006).
- [186] 大浦宏邦：『社会科学者のための進化ゲーム理論 — 基礎から応用まで』，勁草書房 (2008).
- [187] Onnela, J. -P., Saramäki, J., Hyvönen, J., Szabó, G., Lazer, D., Kaski, K., Kertész, J., Barabási, A. -L. : Structure and tie strengths in mobile communication networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 104, pp. 7332–7336 (2007).
- [188] Palla, G., Derényi, I., Farkas, I., Vicsek, T. : Uncovering the overlapping community structure of complex networks in nature and society. *Nature*, Vol. 435, pp. 814–818 (2005).
- [189] Pastor-Satorras, R., Vespignani, A. : Epidemic spreading in scale-free networks. *Physical Review Letters*, Vol. 86, pp. 3200–3203 (2001).
- [190] Pastor-Satorras, R., Vespignani, A. : Immunization of complex networks. *Physical Review E*, Vol. 65, article No. 036104 (2002).
- [191] Pecora, L. M. : Synchronization of oscillators in complex networks. *Pramana Journal of Physics*, Vol. 70, pp. 1175–1198 (2008).
- [192] Pittel, B. : Note on the heights of random recursive trees and random m -ary search trees. *Random Structures and Algorithms*, Vol. 5, pp. 337–347 (1994).
- [193] de Solla Price, D. : A general theory of bibliometric and other cumulative advantage processes. *Journal of the American Society for Information Science*, Vol. 27, pp. 292–306 (1976).
- [194] Ravasz, E., Somera, A. L., Mongru, D. A., Oltvai, Z. N., Barabási, A. -L. : Hierarchical organization of modularity in metabolic networks. *Science*, Vol. 297, pp. 1551–1555 (2002).
- [195] Ravasz, E., Barabási, A. -L. : Hierarchical organization in complex networks. *Physical Review E*, Vol. 67, article No. 026112 (2003).
- [196] Reichardt, J., Bornholdt, S. : Detecting fuzzy community structures in complex networks with a Potts model. *Physical Review Letters*, Vol. 93, article No. 218701 (2004).
- [197] Reichardt, J. : *Structure in complex networks*, (Lecture Notes in Physics 766), Springer (2009).
- [198] Restrepo, J. G., Ott, E., Hunt, B. R. : Onset of synchronization in large networks of coupled oscillators. *Physical Review E*, Vol. 71, article No. 036151 (2005).

- [199] Rodgers, G. J., Austin, K., Kahng, B., Kim, D. : Eigenvalue spectra of complex networks. *Journal of Physics A*, Vol. 38, pp. 9431–9437 (2005).
- [200] Rosvall, M., Bergstrom, C. T. : Maps of random walks on complex networks reveal community structure. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 105, pp. 1118–1123 (2008).
- [201] Rozenfeld, H. D., ben-Avraham, D. : Designer nets from local strategies. *Physical Review E*, Vol. 70, article No. 056107 (2004).
- [202] Rozenfeld, H. D., Havlin, S., ben-Avraham, D. : Fractal and transfractal recursive scale-free nets. *New Journal of Physics*, Vol. 9, article No. 175 (2007).
- [203] 齊藤和巳 : 『ウェブサイエンス入門 — インターネットの構造を解き明かす』, NTT 出版 (2007).
- [204] Sakaguchi, H., Shinomoto, S., Kuramoto, Y. : Local and global self-entrainments in oscillator lattices. *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 77, pp. 1005–1010 (1987).
- [205] Sakaguchi, H., Shinomoto, S., Kuramoto, Y. : Mutual entrainment in oscillator lattices with nonvariational type interaction. *Progress of Theoretical Physics*, Vol. 79, pp. 1069–1079 (1988).
- [206] Santos, F. C., Pacheco, J. M. : Scale-free networks provide a unifying framework for the emergence of cooperation. *Physical Review Letters*, Vol. 95, article No. 098104 (2005)
- [207] Santos, F. C., Pacheco, J. M. : A new route to the evolution of cooperation. *Journal of Evolutionary Biology*, Vol. 19, pp. 726–733 (2006).
- [208] Shen-Orr, S. S., Milo, R., Mangan, S., Alon, U. : Network motifs in the transcriptional regulation network of *Escherichia coli*. *Nature Genetics*, Vol. 31, pp. 64–68 (2002).
- [209] Söderberg, B. : General formalism for inhomogeneous random graphs. *Physical Review E*, Vol. 66, article No. 066121 (2002).
- [210] Solé, R. V., Pastor-Satorras, R., Smith, E., Kepler, T. B. : A model of large-scale proteome evolution. *Advances in Complex Systems*, Vol. 5, pp. 43–54 (2002).
- [211] Song, C., Havlin, S., Makse, H. A. : Self-similarity of complex networks. *Nature*, Vol. 433, pp. 392–395 (2005).
- [212] Song, C., Havlin, S., Makse, H. A. : Origins of fractality in the growth of complex networks. *Nature Physics*, Vol. 2, pp. 275–281 (2006).
- [213] Stauffer, D., Aharony, A. : *Introduction to percolation theory* (Revised second edition), Taylor & Francis (1994). D. スタウファー, A. アハロニー (小田垣孝訳) : 『パーコレーションの基本原理』, 吉岡書店 (2001).

- [214] Szymański, J. : On a nonuniform random recursive tree. *Annals of Discrete Mathematics*, Vol. 33, pp. 297–306 (1987).
- [215] Szymański, J. : On the maximum degree and the height of a random recursive tree. in *Proceedings of Random Graphs '87*, pp. 313–324 (1990).
- [216] Tomassini, M., Pestelacci, E., Luthi, L. : Social dilemmas and cooperation in complex networks. *International Journal of Modern Physics C*, Vol. 18, pp. 1173–1185 (2007).
- [217] Vázquez, A., Boguñá, M., Moreno, Y., Pastor-Satorras, R., Vespignani, A. : Topology and correlations in structured scale-free networks. *Physical Review E*, Vol. 67, article No. 046111 (2003).
- [218] Vázquez, A., Flammini, A., Maritan, A., Vespignani, A. : Modeling of protein interaction networks. *ComPlexUs*, Vol. 1, pp. 38–44 (2003).
- [219] Watts, D. J., Strogatz, S. H. : Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, Vol. 393, pp. 440–442 (1998).
- [220] Watts, D. J., Dodds, P. S., Newman, M. E. J. : Identity and search in social networks. *Science*, Vol. 296, pp. 1302–1305 (2002).
- [221] Yoon, I., Williams, R., Levine, E., Yoon, S., Dunne, J., Martinez, N. : Webs on the Web (WOW): 3D visualization of ecological networks on the WWW for collaborative research and education. in *Proceedings of the IS&T/SPIE Symposium on Electronic Imaging, Visualization and Data Analysis Section*, Vol. 5295, pp. 124–132 (2004).
- [222] Zachary, W. W. : An information flow model for conflict and fission in small groups. *Journal of Anthropological Research*, Vol. 33, pp. 452–473 (1977)

■本補遺の著作権は著者に属しますが、無償でダウンロード可能です。内容を引用するときは引用箇所に、「複雑ネットワーク 補遺 (PDF 版) / ©2010 Naoki Masuda & Norio Konno / 近代科学社刊」と記してください。

複雑ネットワーク 補遺 (PDF 版)

©2010 Naoki Masuda & Norio Konno

2010年4月30日第1版発行

2017年6月30日第2版発行

著者 増田直紀

今野紀雄

発行者 小山透

発行所 (株)近代科学社

〒162-0843 東京都新宿区市谷田町2-7-15

電話 03-3260-6161 <http://www.kindaikagaku.co.jp>

本書は近代科学社刊『複雑ネットワーク』(ISBN 978-4-7649-0363-0)の付録です。