

「基礎からスッキリわかる線形代数」を教科書として利用する 教員・学生の皆さんへ

公開日 2020年6月16日
最終更新日 2020年8月19日
皆本 晃弥

拙著『基礎からスッキリわかる線形代数』の「はじめに」だけでは、読者の皆さんは、『線形代数の教科書としての本書の意図や方針が分かりづらい』と思うかもしれません。また、本書の構成は、これまでの伝統的な線形代数の和書とは少し異なるところもあり、教員の方の中には『教科書として使いづらい』と感じる方もいらっしゃるかもしれません。

ここでは、このように感じる方に少しでも応えるため、本書の考え方や構成などについて詳しく解説します。

1 本書の守備範囲

拙著「スッキリわかる線形代数」(以下、スッキリ線形と表記)で述べたように、線形代数の大きな目標は、

目標1 (第1～3章) 連立一次方程式の解法とその理論構築 ()

- 解けるための条件は？具体的な解き方は？公式はあるのか？()

目標2 (第4～7章) ベクトル間の関係・対応の表現とその理論構築 ()

- 数ベクトルとは？数ベクトル間の対応はどのように表せるか？表せるならば、より単純に表せるか？()
- 数ベクトルの概念を抽象化するにはどうしたらいいか？()

の2つです。このうち、()の部分が主に本書で扱う部分です。

また、本書を執筆する際には、理工系学生の共通教育として、線形代数の基礎・基本が担当教員や所属クラスの違いに左右されることなく学べるよう配慮しました。具体的には、和書や国際的に利用されている洋書の共通項目および水準をベースとしつつ、なるべく丁寧な説明を心がけました。

なお、()につながる話、つまり、数ベクトルの抽象化を学ぶには、複素数が欠かせませんが、複素数が登場する節はなるべく独立させています。そのため、それらを読み飛ばしても()の理解には支障がないと思います。

2 本書の特徴

「はじめに」と重複する部分もありますが、本書を執筆する上で、意識したことを以下に列挙しましょう。

- 概念が、「なぜ登場しなければならなかったのか」、「なぜそのように定義しなければならなかったのか」といった点を解説しました。
- 定義、定理、証明、例題スタイルを採用しました。
 - － 定義、定理、例題を読めば、証明を読まなくても、線形代数を一通り学ぶことができます。特に、例題の解答は、「分かりやすさ」を重視するとともに、詳細に記載しています。学生の皆さんが予習・復習をする際には、まずは、定義、定理および例題をしっかりと読むことを期待しています。
 - － 読者の勉学の助けになるよう、基礎はしっかりと、特に、重要なところについては側注を活用して強調したり、可能な限り丁寧に解説しています。
 - － 定理の証明はなるべく詳しく記述し、直観的に分かりやすい証明にしました。
 - * そもそも 数学は現象を記述する言語 です。その言語を理解せずして問題の本質を明らかにすることは難しいです。近年、データサイエンスの重要性が増すとともに、「線形代数」の重要性も増しています。「線形代数」は誰もが知るべき言語になってきたとも言えます。証明の理解は、この言語の理解を深める上では非常に重要です。
 - * 読書量が国語力を決めるならば、証明量が数学力、本書の場合「線形代数力」を決めると言っても過言ではないでしょう。証明を読まないという行為は、本でいえば「あらすじ」しか読まないようなものです。分かった気になるかもしれませんが、あらすじばかり読んでいても本を書けるようにならないし、そこにある深い知識・技能も活用できません。
 - * 最初は、あるいは分野によっては、あらすじだけを読む（証明を読まない）、というのも仕方ないかもしれませんが、深く読もうと思ったときに、証明がなければ読むことすらできません。本書では、証明を読める機会だけは提供したいと思います。
- 振り返りを促す活動を【アクティブ・ラーニング】として入れています。
 - － 人によって得意不得意があるし、学び方も異なる上、興味や専門等によっても重要な項目は変わります。各章の終わりでは、あくまでも「自分にとって重要な項目」を自分の頭で考えて欲しいと思います。
 - － 例題では「みんなができるようになるにはどうしたらいいか?」という問いかけをしています。すべての例題に対してこの振り返りを行う必要はありません

が、この活動を通じて、人によって理解の仕方が違う、ことを体感してもらいたいと思います。

- 「題意」という言葉は使っていません。

高校数学の教科書では「題意」という言葉は登場していないはずですが、受験参考書の影響もあり、「題意」という言葉を使う学生が多くいます。中には「題意より題意が示された」みたいなことを平気で書く学生もいます。そもそも「題意」というのは数学用語ではないはず（数学論文では使わない）ですし、「題意」が示す範囲が不明確です。何が示されたのかはハッキリと書くべきです。

また、「与式」（given equation, given relation）という言葉も、これが何を指しているのか分からない場合もあるので、1つの例外（例題 1.2）を除いて使っていません。

3 高校数学との接続

高等教育機関で線形代数を学ぶ人の多くは、高校数学 B「ベクトル」に相当する内容を一度は学んでいるはずですが、そうであれば、その知識を使わないのはもったいないと思います。そこで、第 1～3 章において高校で学ぶベクトルの内容を援用した方が理解しやすいと思われる事項については、高校数学の記号を用いた上で、その内容を利用しています。例えば、第 1 章の側注 (p.6) で内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ が登場していますが、これは高校数学 B で学ぶ内積の意味で使っています。そして、第 4 章であらためてベクトルを導入しますが、ここでは高校数学と異なり、大学の教科書において国際的に広く使われている記号を使っています。例えば、ベクトルは \vec{a} ではなく a 、内積は $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ではなく (a, b) と表しています。同じベクトルや内積でも、第 3 章までと第 4 章以降では記号が違う、あるいは、第 4 章で登場している概念を第 1～3 章で使っているところがある、というのはこのような理由によります。

ただし、このようなところはほんの一部しかありません から、高校数学 B を学んでいない人は「高校数学 B では、そんなものがあるんだ」くらいに思って、読み進めてもらえばと思います。

なお、2022 年度からの新学習指導要領では、ベクトルが数学 C で扱われるようになるため、今後、ベクトルに不慣れな新入生が増える可能性があります。しかし、第 1～3 章では、ベクトルの概念をほとんど使わないように配慮していますので、ベクトルに不慣れな学生でも、最初から躓いてしまうことはないと思います。

4 本書の構成

本書の構成について、説明しましょう。

なお、本書で登場する例題は、3次行列を基本としていますが、行列を理解しやすいよう、あるいは深く理解できるよう、2次行列や4次行列なども扱っています。こうすることで、行列の理解も進み、一般の n 次行列の場合もイメージしやすくなるでしょう。

4.1 第1章

第1章では、行列を導入し、その演算や性質、および活用例を示します。活用例では、デジタル画像、市場シェア予測、CT スキャン、検索エンジン、人工知能、意思決定を取り上げています。学生から「行列が何の役に立つのか」といった質問が寄せられることがあります。その一つの答えになるでしょう。ここでは、行列は様々な現象を表現できることも理解してもらいたいと思います。そして、本章で導入する行列が「目標1」において重要な役割を果たします。

また、多くの「線形代数」の和書では数ベクトルから始めますが、ここでは、あえて数ベクトルという概念を前面に出さないようにしています。なぜなら、もし数ベクトルを最初に導入するのであれば、スッキリ線形や Strang 著 "Introduction to Linear Algebra" (邦訳「世界標準 MIT 教科書 ストラング：線形代数イントロダクション」、近代科学社、2015年、以下、ストラング本と略記) のように行列やその後に登場する行列式を表現する際にも、数ベクトルを使うべきですが、初学者にとってはそれが理解の妨げになる場合があるからです。例えば、行列を $A = [a_1, a_2, a_3]$ とベクトルで表したとき、状況に応じ

$$\text{て } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \text{ などと書き下せ}$$

ない学生を見かけます。慣れるとベクトル表記は便利なのですが、それが行列の理解を習得を妨げては元も子もありません。

このようにベクトルを前面に出さないのであれば、ベクトルは「目標2：ベクトル間の関係・対応の理論化」でまとめて登場させるべきです。そこで、ベクトルの概念は第4章以降にまとめて登場させています。

ちなみに、本書のように、数ベクトルではなく、行列や連立一次方程式から導入するというやり方は、例えば、David C. Lay 著 "Linear Algebra and its applications (Third Edition)" (Pearson Education, 2003(以下、Lay 本と略記) にも見られます。

4.2 第2章

第2章では、 $m \times n$ 行列 A 、 $n \times 1$ 行列 x 、 $m \times 1$ 行列 b を用いて、連立一次方程式を $Ax = b$ と表し、これを考察します。

ここでは、まず、掃き出し法による連立一次方程式の解法について学びます。より具体的には、連立一次方程式の解を

$$\text{前進消去} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \Rightarrow \text{後退代入} \begin{cases} x_3 = 2 \\ x_2 = 3 + x_3 = 3 + 2 = 5 \\ x_1 = 4 - 3x_3 + 2x_2 = 4 - 6 + 10 = 8 \end{cases}$$

と求めます。教科書によっては、前進消去の後、後退代入ではなく、行列を標準形まで、つ

まり、 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$ と変形して連立一次方程式の解を求めているものもありますが、数

値計算では、このようなことはしません。なぜなら、標準形への変形よりも後退代入の方が計算量が少ないからです。そのため、本書では、ストラング本と同様、「掃き出し法 = 前進消去 + 後退代入」を標準としました。連立一次方程式の解が $x = A^{-1}b$ と表せるから といって、逆行列 A^{-1} を求めて解 x を求めてはいけない、というのは数値計算の常識ですが、本書でもこのことを強調しておきたいと思います。

また、私の経験上、多くの学生が、連立一次方程式にはいつも一意解が存在する、と考えがちです。そのため、掃き出し法の最初の説明では、あえて不定解が登場する例を出しています。このあたりの考え方は、教員によって違うでしょうから、教員が教える際には、例題 2.1 を参考にして、自分の好みの例を取り上げてもらいたいと思います。

その後、ランクを導入し、連立一次方程式が解けるための必要十分条件を導きます。ランクを求めるための計算法は、基本的には掃き出し法と変わりません。

4.3 第3章

第3章では、行列式を導入します。行列式を使うと、連立一次方程式の解の公式や逆行列の公式が得られます。

こういった公式や連立一次方程式の一意解の存在条件が導けるといって、行列式は、計算上というよりは、理論的に重要な概念です。理論的に重要な行列式と、計算する上で重要な掃き出し法のどちらを先に導入するかは悩ましいところですが、初学者は理論が先に登場すると、そこで疲弊してしまう可能性があるため、本書では、掃き出し法、行列式の順にしました。ちなみに、ストラング本や Lay 本でもこの順になっています。

先ほど述べたように、連立一次方程式の解を求める際には、逆行列を求めません。掃き出し法 (= 前進消去 + 後退代入) に比べるとかなり遅いからです。実は、行列式で求めるとさらに遅いのです。そのため、数値計算では行列式を求めるようなことはまずないでしょう。そういう意味では、あまり行列式の計算練習はいらないかもしれません。しかし、計算練習は行列式の性質やその利用法を理解する助けになるし、日本では、大学編入学試験、大学院入試、企業の入社試験、数学教員採用試験、公務員試験などにおいて行列式の計算がよく出題されている、という現実があるため、計算問題も用意しています。

なお、一般に、行列式は置換という概念を使って定義されますが、初学者には分かりづらいと思います。そこで、本書は Lay 本に習い、行列式を帰納的に定義しています。ただし、Lay 本とは異なり、定理に詳細な証明をつけています。

以上、第 3 章までで、「目標 1」は達成されます。

4.4 第 4 章

第 4 章からは、「目標 2」を達成するためにベクトルを導入します。

本章では、高校数学の復習を兼ねて、平面ベクトル、空間ベクトルから始めています。そして、平面ベクトルと空間ベクトルに、内積と外積という概念を導入し、行列式を介して面積や体積の公式が得られることを示します。

高校数学の旧学習指導要領では、数学 C において平面上の一次変換を土台として行列と平面ベクトル、空間ベクトルや直線・平面の方程式等を扱っていましたが、現学習指導要領では、これらが割愛されたため、本章でこれらの内容を扱うことにしました。また、2022 年度からの新学習指導要領では、ベクトルが数学 C で扱われるようになります。そのため、2025 年度から大学へ入学する学生は、ベクトルがやや不慣れになっている可能性があります。そのような場合は、第 4 章を丁寧に読むことをおすすめします。

4.5 第 5 章

第 5 章では、数ベクトルを導入します。平面ベクトルと空間ベクトルは、それぞれ 2 次元ベクトル、3 次元ベクトルですが、これらを拡張した数ベクトルは n 次元ベクトルです。

2 次元や 3 次元の場合は「次元」という考え方はわかりやすいですが、 n 次元となると、なかなかイメージしづらいです。この「次元」を定義するため、一次独立や基底という概念を導入します。

なお、基本的には、数ベクトル空間で話を進めますが、後半では数ベクトルを一般化した抽象ベクトルを導入しています。

4.6 第 6 章

第 6 章では、数ベクトルと数ベクトル間の対応を線形写像で表し、それが行列により表現できることを示します。

スッキリ線形では、写像に単射や全射という概念を導入し、これらと核および像の関係も説明しました。しかし、初学者にはやや難しいようで、これが学習意欲を削ぐ恐れがあります。そこで、本書では、線形写像の単射性、全射性の議論はあえて避けました。ちなみに、ストラング本や Lay 本でもこれらの議論を避けています。

線形写像の単射性，全射性の議論がないと，線形写像の核や像の意義が理解しづらくなってしまいかもかもしれませんが，せめて線形写像が核と像で特徴づけられることだけでも感じとってもらえれば幸いです．

4.7 第7章

第7章では，線形写像を表した行列を単純化（対角化）するための条件やその方法について説明します．この第7章で「目標2」は達成されます．

行列の対角化で重要な役割を果たすのが固有値や固有ベクトルです．固有値を求める公式を導く際にも行列式が役に立ちます．また，行列の対角化の応用として，2次形式の標準形を取り上げますが，授業回数も限られるでしょうから，授業では「第7.3節 対称行列の直交行列による対角化」までを目標に授業設計されるといいと思います．

その先の話としては，行列の特異値，ジョルダンの標準形などがありますが，それらについては，スッキリ線形と Web ページで公開している資料をご覧くださいと思います．

5 おわりに

いろいろなスタイルの教科書が登場していますが，本書のような定義，定理，証明，例題のスタイルのよさは，本書で線形代数を学んだ後，線形代数の知識が必要になったときに，定義と定理を中心に読み返せば復習がしやすい，という点だと思います．

また，数学は言語ですから，外国語と同じように，海外旅行レベル（何とか使える），日常会話レベル（おおよそ使える），ビジネス会話レベル（ほぼ正確に使える）のようなレベル分けもできるでしょう．本書の場合，

- 海外旅行レベル（何とか例題を理解できる）
- 日常会話レベル（定義と定理の意味および例題を理解できる）
- ビジネス会話レベル（定義，定理，証明，例題を理解できる）

という感じでしょうか．一方で，

非数学系 線形代数を道具として使いこなす．

- 道具の作り方は分からなくても，道具の特性を理解し，適切に使いこなせる．
 - － 定義，定理の意味，例題を理解し，必要に応じてこれらの内容を適切に活用できる．

数学系 線形代数をよりよい道具にする．

- 道具の作り方を理解し，さらによりよい道具を作り出す．

- 証明も理解し，線形代数やその先にある関数解析等をよりよいものにする．

という分け方もできるかもしれません．

学ぶ時期や大学・高専・学部・学科などによって，どのレベルを目指すかは異なって当然でしょう．私としては，復習もしやすく，色々なレベルに対応できるように配慮して本書を執筆しましたので，読者の皆さんには，本書を長く愛用して頂ければ幸いです．

授業計画例 (全 30 回)

(複素数は扱わないという前提)

以下は、あくまで例なので、授業で利用する際には、教員が適宜、問題を取捨選択して構いません状況によっては飛ばしてもよい例題には * を付しています。

各節のページ数よりも、授業で扱う例題数を意識して授業計画を立てるよいでしょう。

1. 行列とその和・スカラー倍 (第 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5 節 : 例題 1.1, 1.2, 1.3)
2. 行列の積 (第 1.6 節 : 例題 1.4, 1.5)
3. 正方行列とべき乗の計算 (第 1.7 節 : 例題 1.6, 1.7, 1.8, 1.9*)
4. 逆行列 (第 1.7 節 : 例題 1.10, 1.11, 1.12)
5. 色々な行列 (第 1.8, 1.9 節 : 例題 1.13, 1.14)
6. 掃き出し法による連立一次方程式の解法 (第 2.1, 2.2 節 : 例題 2.1)
7. 基本行列 (第 2.3 節 : 例題 2.2)
【この回以降において、基本行列を用いた証明を説明しないのであれば、この回は飛ばしてもよい】
8. 行列のランクと連立一次方程式 (第 2.4, 2.5, 2.6 節 : 例題 2.3, 2.4)
9. ランクと行列の正則性 (第 2.7, 2.8 節 : 例題 2.5, 2.6, 2.7)
10. 同次連立一次方程式 (第 2.9 節 : 例題 2.8, 2.9)
【この回以降において、自明解・非自明解という概念を使わないのであれば、この回は飛ばしてもよい】
11. 2 次と 3 次の行列式 (第 3.1, 3.2 節 : 問 3.1, 例題 3.1)
12. 余因子展開 (第 3.3 節 : 例題 3.2)
13. 行列式の性質 (第 3.4, 3.5 節 : 例題 3.3, 3.4*, 3.5, 3.6*)
14. 余因子行列と逆行列 (第 3.6 節 : 例題 3.7)
15. 行列式と連立一次方程式 (第 3.7 節 : 例題 3.8, 3.9*)
16. ベクトルとその演算 (第 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 節 : 例題 4.1, 4.2)
17. 内積と直線・平面の方程式 (第 4.5, 4.6, 4.7 節 : 例題 4.3, 4.4, 4.5, 4.6)
18. 平面上の一次変換 (第 4.8 節 : 例題 4.7, 4.8, 4.9*)

19. 空間ベクトルの外積 (第 4.9 節 : 例題 4.10, 4.11, 4.12)
20. 数ベクトル空間と内積 (第 5.1 節 : 例題 5.1, 5.2)
21. 直交行列 (第 5.2 節 : 例題 5.3, 5.4)
22. 部分空間 (第 5.3 節 : 例題 5.5, 5.6)
23. 一次独立と一次従属 (第 5.4 節 : 例題 5.7)
24. 次元と基底 (第 5.5 節 : 例題 5.8)
25. 正規直交基底 (第 5.6 節 : 例題 5.9)
26. 線形写像 (第 6.1 節 : 例題 6.1, 6.2)
27. 線形写像とその性質 (第 6.2, 6.3 節 : 例題 6.3)
【第 7.2 節において, 代数的重複度・幾何的重複度を扱わないのであれば, この回は飛ばしてもよい】
28. 固有値と固有ベクトル (第 7.1 節 : 例題 7.1*, 7.3, 7.4)
29. 行列の対角化 (第 7.2 節 : 例題 7.5, 7.6, 7.7*)
30. 直交行列による対角化 (第 7.2 節 : 例題 7.8)