はじめに

本書の位置づけと特徴

本書は，線形代数の基礎を学習するための入門書です．高校数学の初等的な知識があれば読み進められるよう，基本的なところから丁寧に説明しています．もともと，本書は，佐賀大学理工学部の数学共通教科書として企画されたため，特定の学科や課程を想定している訳ではありません．また，工学系だけでなく，理学系も意識して，複素数が登場するような例も取り入れています．さらに，学生の学習履歴の多様化へも対応できるよう，簡単になり過ぎないように，かつ，難しくなり過ぎないように配慮しました．そのため，本書は，文系，理系を問わず，様々な大学，短大，高専，あるいは社会人の再教育などにおいても，テキストとして利用できると思います．

以下に，本書の特徴を示します．

(1) これまでの経験から，高校数学において学生が不得意だと思われる事項や忘れがちな事項については，その都度，側注で説明しています．

(2) 日本語が不得意な留学生などを想定し，数学用語にはルビと英語表記を併記しました．日本人学生にとっても，英語表記は，将来，英文文献の検索や大学院入試の英語などでも役に立つでしょう．

(3) 学生が自習しやすいように，新しい概念が出る都度，例題と問を豊富に配置し，例題には詳細な解答を，問には略解とヒントをすべて掲載しました．

(4) 章末に演習問題を用意し，すべての演習問題に略解とヒントを付しています．

(5) アクティブ・ラーニング例を示しました．
　これについては，「本書の使い方」で説明したいと思います．

(6) ほとんどの定理に詳細な証明をつけました．
入門書では，定理に証明をつけないこともあるのですが，それでは，やさしい部分のみを取り出して，すべての読者の皆さんを分かった気にさせるだけにしてしまう恐れがあります．やはり，数学的概念や定理

の本質的な意味を理解しようとすると，どうしても定理の証明が必要です．読者の皆さんには，少なくとも証明に触れる機会は数多く提供したいと思います．なお，証明は数学的な厳密さよりも，直観的に理解できるようなものにしています．

今では，本書に登場するような線形代数の計算問題だけなら，コンピュータがあっという間に解いてしまいます．しかし，コンピュータは意味を理解して計算している訳ではありません．人間である皆さんは，なるべく計算力だけでなく，線形代数の考え方も身に付けて，これを新たな時代を生き抜く糧にしてもらいたいと思います．

本書の使い方

以下に，本書の使い方の例を示します．あくまでも例なので，自分の状況に応じてやり方を変えて構いません．

計算力を中心に身に付けたい場合

計算力を身に付けたい場合は，次の手順で読み進めましょう．

(1) 本文の定義と定理を前から順に読む．定理の証明を読む必要はないが，定理の意味は理解するよう務める．

(2) 前から読み進み，例題までくれば，その例題に取り組み，何も見ずにスラスラ解けるまで，何度も繰り返し取り組む．

(3) 例題がスラスラ解けるようになったら，その例題に関連する問に取り組む．

(4) 上記の例題や問に対応する演習問題に取り組む．演習問題では，証明問題を飛ばしてもよい．

理論を中心に学びたい場合

線形代数の理論を中心に学びたい場合は，次の手順で読み進めましょう．

(1) 本文の定義と定理を前から順に読む．定理の証明を手を動かしながら追うとととともに，定理の証明とその意味もしっかりと理解する．

(2) 前から読み進み，例題までくれば，その例題に取り組む．

(3) 例題のすべての問題が何も見ずに解けるよになったら，その例題に関連する問に取り組む．

(4) 上記の例題や問に対応する演習問題に取り組む．演習問題の証明も必ず取り組む．

(5) 章ごとに，理論的に重要だと思う点を自身の言葉でまとめる．

なお，理論も計算もしっかりと学びたいときは，上記 2 つの方法の両方を行ってください．

アクティブ・ラーニングを取り入れる場合

「アクティブ・ラーニング」とは,「主体的・対話的で深い学び」と言われています．本書は，アクティブ・ラーニングの解説書ではないので，これ以上，アクテイブ・ラーニングそのものやこれを取り巻く話題などには踏み込まず，そのやり方のみを示します．これもあくまでも例ですから，状況に応じてやり方を変えても構いません．

▶[アクティブ・ラーニングの情報]
アクティブ・ラーニングについて知りたい人は，文献[2, 11–13]などを参照してください．

【注意】あくまでも【アクティブ・ラーニング】で示した活動は，例なので，この通り行う必要も，全てを行う必要もありません．

基本的な問題を解けるようになりたい場合

例題に対応した【アクティブ・ラーニング】を行いましょう．その際

(1) まずは自分で考え，それを書き出す（「個」）．

(2) 自分の意見を他の人に話したり，他の人の意見を聞いたりする（「協働」）．

(3) 以上を踏まえて, 自分の考えをまとめ直し, それを書き出す (「個」).

という「個－協働－個の学習サイクル」を繰り返してください．

▶[個－協働－個の学習サイクル]
個－協働－個の学習サイクルの事例については，例えば，文献[13]を参照してください．なお, 本書の【アクティブ・ラーニング】は,「個－協働－個の学習サイクル」を意識して書かれています．

数学的な概念や理論を深く学びたい場合

定義や定理に対応した【アクティブ・ラーニング】，および各章の最後にある【アクティブ・ラーニング】を行いましょう．その際,「個－協働－個の学習サイクル」を意識してください．

アクティブ・ラーニングの注意点

漫然と他の人とおしゃべりしても何の力も身につきません．アクティブ・ラーニングを取り入れる場合は，必ず導入目的をはっきりさせましょう．例えば，目的が「問題を解けるようになる」なら，自分なりの解法手順をみんなの意見も参考にしながら，まとめるような活動をすべきです．そして，「わかった＝人に説明できる」を意識して，他の人に解説してみましょう．

また，アクティブ・ラーニングを取り入れる場合は，文書を正しく理解する力（読解力）と他人の意見を聞いて正しく理解する力（傾聴力）が必要です．私の経験では，グループワークにおいて,「教科書に書かれている内容が理解できない」,「相手の言っている日本語が難しくて理解できない」,という学生が必ずいます．もしも，グループワークなどでそのことを自覚した場合には，新聞を読んだりやニュースを見る時間を増やすなど，読解力と傾聴力の向上に努めてください．新聞記事を題材にして，お互いに話合ったり，質問作りをしてみるのもいいでしょう．

▶[質問作り]
「質問づくり」の方法については，例えば，文献[7]を参照してください．

これからの学習法について考えてみよう

昭和の時代，日本は工業社会に資する人材の育成に成功し，急成長をしました．工業社会は，大量生産，大量消費の社会でもあり，そこでは，正確に速く計算する力，マニュアルを覚えて正確に再現する力，などが重要視され，これらの能力は，学校の教科（国語，数学，理科，社会，英語など）で育成されました．このような教育で高度経済成長を実現できたのは日本の大きな成功であり，誇りでもあります．しかし，これはパソコンやインターネットが広く普及する前の話です．正確に速く計算する力，マニュアルを覚えて正確に再現する力，などはコンピュータが得意とする作業です．今まさに直面している第 4 次産業革命（人工知能，ビッグデータ，IoT 等が中心）の時代を生き抜くには，コンピュータが得意とする能力だけを鍛えても意味がありません．また，第 4 次産業革命によって，今後，どのようなことが起こるのか，予測は困難です．このような時代を生き抜くためにも，今後は，認知科学でいうところの「生きた知識」を創造する力，学んだ知識や考え方を問題発見や解決に活かす力，知識を知恵に昇華させる力，人工知能では解けない問題に取り組める力，人間にしかできない創造的・協働的な活動を創り出しやり抜く力，などがますます重要になってくるでしょう．アクティブ・ラーニングは，これらの能力の育成を目指した一つの学習法に過ぎません．例えば，数学の場合，定理の証明をすれば，「本当に定理が成り立つんだ」，「この考え方はすごい」，「この考え方は他にも使えそうだ」といった感動や推測が得れられ，この経験が知識を知恵に変えることでしょう．計算においても，コンピュータは意味も考えずに計算しますが，人間らしく数学的な背景も意識した上で計算すれば，その過程で得られた考え方やテクニックが他のところへ適用できるようになるかもしれません．

ただし，学習法に正解ありません．学び方も人によって違います．同じ教科書を読むにしても，前から丁寧に読む人，一通り大雑把に読んでから細部を読む人，一人で学ぶのが好きな人，みんなと一緒に学ぶのが好きな人，など多様です．いずれにせよ，皆さんには，100 年に 1 度と言われている大変革期の真っ只中にいることを意識し，自身の学び方も踏まえた上で，自身のどの能力をどのように伸ばすかを真剣に考え，自身にあった学習法を見つけて，新たな時代をたくましく生き抜いて欲しいと思います．

2019 年（令和元年）5 月

皆本　晃弥

▶［人工知能］
人工知能というと，何となく賢そうですが，コンピュータ上で動くソフトウェアに過ぎません．コンピュータは，もともと演算を高速に行う機械ですから，基本的に数式で表現できないような行動はできません．当然ながら意味を考えることもできません．なお，人工知能については，例えば，文献[1)]を参照してください．

▶［知恵］
知恵とは「物事の理を悟り，適切に処理する能力のこと」(広辞苑・第六版）です．

▶【アクティブ・ラーニング】
週刊ダイヤモンドオンライン（2018 年 8 月 20 日付）によれば，平成元年（1989 年）の世界時価総額ランキングの上位 50 社中，日本企業は 32 社でしたが，平成 30 年（2018 年）は 1 社のみです．なぜ，このような状況になったのだろうか？これは，高度経済成長を支えた人材育成法が通用しなくなったことを意味するのだろうか？ 自分の意見をまとめた上で，他の人と話し合ってみよう．

例題 1.4（2 次行列の積）

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ のとき，AB と BA を求めよ．

（解答）

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times4+2\times2 & 1\times3+2\times1 \\ 3\times4+4\times2 & 3\times3+4\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 13 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\times1+3\times3 & 4\times2+3\times4 \\ 2\times1+1\times3 & 2\times2+1\times4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 20 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$

■

[問] 1.3　次の計算をせよ．

(1) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1+\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$

2 次行列の積 AB の各成分は，A の行ベクトルと B の列ベクトルの積になっている．これは，それぞれの成分が同じ個数であれば，積 AB を考えることができる，つまり，次のことを意味する．

- 「A の列数 $=$ B の行数」のときは，積 AB が考えられる．
- 「A の列数 $\neq$ B の行数」のときは，積 AB は考えられない．

そこで，n 次 の行ベクトル $[a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in}]$ と n 次 の列ベクトル $\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$ の積を (1.3) にならって，

$$[a_{i1}\ a_{i2} \cdots\ a_{in}] \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \tag{1.5}$$

と定めれば，これを (i, j) 成分とする積 AB が定義できる．

▶ [一般に行列の積は非可換]
例題 1.4 が示すように，一般には行列の積では交換法則 $AB = BA$ が成り立たない．なお，$AB = BA$ が成り立つとき，A と B は可換（かかん）(commutative) であるという．行列の積は，可換であるとは限らないという意味で，非可換（ひかかん）(non-commutative) である，という．
非可換な現象は珍しいものではない．例えば，A をメインディッシュを食べる，B をデザートを食べるとしたとき，BA(メインディッシュを食べた後，デザートを食べる)，AB(デザートを食べた後，メインディッシュを食べる) が同じとは言えないだろう．

▶【アクティブ・ラーニング】
身近な可換な例と非可換な例を作り，他の人に説明しよう．お互いに例を共有し，最も面白いと思う例を選ぼう．また，選んだ理由も明確にしよう．

数学の概念を実生活と結び付けたようなアクティブ・ラーニング例を提示

となるので，逆行列 A^{-1} は存在すればただ一つである．この性質を，逆行列の一意性(いちいせい)(uniqueness) という．

また，数 a については，$a \neq 0$ のとき逆数 $\dfrac{1}{a}$ が存在するが，行列では $A \neq O$ でも逆行列 A^{-1} が存在するとは限らない．実際，$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ は $A \neq O$ だが，$XA = E_2$ を満たす行列 $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ があるとすれば，

$XA = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & 0 \\ x_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2$ であり，$(2,2)$ 成分に着目すると，$0 = 1$ という矛盾が生じる．

【注意】 逆行列の一意性から，A の逆行列を A^{-1} のように特定の記号で表してよいことが保証される．

【注意】 A が正則行列のとき，$A^{-k} = (A^{-1})^k$ と定めると，負の整数のべき乗も定義される．このとき，整数 k, l に対して，$A^k A^l = A^{k+l}$，$(A^k)^l = A^{kl}$ が成立する．

例題 1.10（逆行列）
n 次正方行列 A と n 次単位行列 E_n に対して，$A^3 = O$ ならば $(E_n + A)$ は正則で $(E_n + A)^{-1} = E_n - A + A^2$ が成り立つことを示せ．

（解答）
$A^3 = O$ に注意すれば，

$$\begin{aligned}(E_n - A + A^2)(E_n + A) &= E_n + A - A - A^2 + A^2 + A^3 = E_n + A^3 = E_n \\ (E_n + A)(E_n - A + A^2) &= E_n - A + A^2 + A - A^2 + A^3 = E_n + A^3 = E_n\end{aligned}$$

となる．これは，$E_n + A$ が正則かつ $(E_n + A)^{-1} = E_n - A + A^2$ であることを意味する．■

［問］1.9　n 次正方行列 A が $A^2 + 2A - E_n = O$ を満たすとき，A が正則であることを示し，A の逆行列を求めよ．

逆行列については次の性質が成り立つ．

定理 1.5（逆行列の性質）
n 次正方行列 A と B に対して，次が成り立つ．

(1) A が正則行列ならば，A^{-1} も正則行列で

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

(2) A, B が正則行列ならば，AB も正則で

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

よくある間違いを提示

▶［よくある間違い］
「$(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$」としないようにしよう．正しくは，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である．

（証明）
(1) A が正則ならば，$AX = XA = E_n$ となる n 次正方行列 X が存在して，$X = A^{-1}$ となる．よって，$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n$ なので，A^{-1} も正則で，$(A^{-1})^{-1} = A$ である．
(2) $(AB)X = X(AB) = E_n$ 満たす X が存在すれば，AB は正則で，$X = (AB)^{-1}$ である．そこで，$X = B^{-1}A^{-1}$ とすると，

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})AB \;=\; B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E_n$$

なので，AB は正則で，$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ が成り立つ. ■

特長3

例題 1.11（逆行列の性質）
n 次正則行列 A, B に対して，$AB^2 = B^2A$ ならば，$B^{-1}A^{-1}B = BA^{-1}B^{-1}$ となることを示せ.

（解答）
$AB^2 = B^2A$ の両辺の逆行列を考えれば，

$$\begin{aligned}
&(ABB)^{-1} = (BBA)^{-1} \Longrightarrow B^{-1}(AB)^{-1} = (BA)^{-1}B^{-1} \\
&\Longrightarrow B^{-1}B^{-1}A^{-1} = A^{-1}B^{-1}B^{-1} \\
&\Longrightarrow B(B^{-1}B^{-1}A^{-1})B = B(A^{-1}B^{-1}B^{-1})B \Longrightarrow B^{-1}A^{-1}B = BA^{-1}B^{-1}
\end{aligned}$$

■

［問］1.10　A と B を n 次正則行列とし，$AB = BA$ とするとき，$A^{-1}B = BA^{-1}$ を示せ.

定理 1.6（2 次行列の逆行列）
行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が逆行列をもつための必要十分条件は，

$$|A| = ad - bc \neq 0 \tag{1.8}$$

であり，このとき逆行列 A^{-1} は次式で与えられる.

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

なお，$|A| = ad - bc$ を A の行列式(determinant) といい，$\det A$ と表すこともある.

（証明）
($\Longrightarrow$) A が (1.7) を満たす $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ をもつとすれば，$AX = E_2$ より次式を得る.

$$\begin{cases} ax_{11} + bx_{21} = 1 \\ cx_{11} + dx_{21} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax_{12} + bx_{22} = 0 \\ cx_{12} + dx_{22} = 1 \end{cases}$$

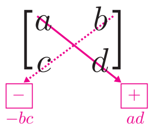
前半の式から $(bc - ad)x_{21} = c$ および $(ad - bc)x_{11} = d$ を得るが，後半の第 2 式 $cx_{12} + dx_{22} = 1$ より，少なくとも c, d の一方は 0 ではない．そこで，例えば，$d \neq 0$ とすれば，$(ad - bc)x_{11} = d \neq 0$ なので，$|A| = ad - bc \neq 0$ でなければならない．また，$c \neq 0$ のときも $(ad - bc)x_{21} = -c \neq 0$ より $|A| = ad - bc \neq 0$ でなければならない.
($\Longleftarrow$) $|A| \neq 0$ のとき，$X = \dfrac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ とおけば，

$$XA = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = E_2$$

特長5

▶【アクティブ・ラーニング】
例題 1.10 や 1.11 はすべて確実にできるようになりましたか？できない問題があれば，それがどうすればできるようになりますか？何に気をつければいいですか？また，読者全員ができるようになるにはどうすればいいでしょうか？それを紙に書き出しましょう．そして，書き出した紙を周りの人と見せ合って，それをまとめてグループごとに発表しましょう.

▶［サラスの計算法］
(1.8) の行列式 $|A|$ を計算するときは，次のような図を使い，たすきがけで計算するとよい.



このような計算法をサラスの計算法 (Sarrus's rule, Sarrus's scheme) という.

▶［必要十分条件］
2 つの条件 p, q に対して，命題 $p \Longrightarrow q$ が真である (正しい) とき，q は p であるための必要条件(necessary condition) といい，p は q であるための十分条件(sufficient condition) という．また，命題 $p \Longrightarrow q$ と $q \Longrightarrow p$ がともに真のとき，q は p であるための必要十分条件(necessary and sufficient condition) という．同様に，p は q であるための必要十分条件である．このとき，$p \iff q$ と表す．例えば，実数 a に対して「$a^2 = 0 \iff a = 0$」なので，$a^2 = 0$ は $a = 0$ であるための必要十分条件である．同様に，$a = 0$ は $a^2 = 0$ であるための必要十分条件である.

特長1，2

行列の活用例を提示

【注意】PageRank の発明者は，セルゲイ・ブリン (Sergey Brin) とラリー・ページ (Larry Page) だが，この二人が Google を創業したので，ここでは「Google が PageRank を開発した」との立場で説明している．

▶【アクティブ・ラーニング】
あなたならどのような方法で， Web ページの重要度を決めますか？自分の考えをまとめて，お互いに披露し合おう．そして，決め方のうち，最もいい方法を選び，その理由も明確にしよう．

検索エンジンと行列

我々が，インターネットを使って検索する際にお世話になるのが検索エンジンで，最も有名なのが Google であろう．この Google が開発した PageRank という方法を簡単に説明しよう．

通常，Web ページにはリンクがはられ，ページの間を移動できるようになっている．PageRank の考え方は,「Web ページは，他の重要な Web ページからリンクがはられている数が多いほど重要度が高い」というもので，これを定式化したことが Google の凄さともいえる．

ここでは，簡単のため，文献[19] の例を使い，ネット上には 6 つしかページがなく，リンクが図 1.3 のようにはられているとする．

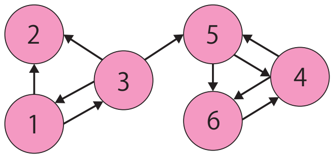


図 **1.3**　6 つのページの関係

そして，ページ i の得点 $r(P_i)$ を

$$r(P_i) = \sum_{P_j \in B_{P_i}} \frac{r(P_j)}{|P_j|}$$

と定める．ただし，B_{P_i} は P_i を指すページの集合，$|P_j|$ はページ j が指しているリンクの数である．今の例では，次のようになる．

$$r(P_1) = \frac{r(P_3)}{3}, \qquad r(P_2) = \frac{r(P_1)}{2} + \frac{r(P_3)}{3}, \qquad r(P_3) = \frac{r(P_1)}{2}$$
$$r(P_4) = \frac{r(P_5)}{2} + r(P_6), \qquad r(P_5) = \frac{r(P_3)}{3} + \frac{r(P_4)}{2},$$
$$r(P_6) = \frac{r(P_4)}{2} + \frac{r(P_5)}{2}$$

これを行列で表せば，

$$\begin{bmatrix} r(P_1) \\ r(P_2) \\ r(P_3) \\ r(P_4) \\ r(P_5) \\ r(P_6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(P_1) \\ r(P_2) \\ r(P_3) \\ r(P_4) \\ r(P_5) \\ r(P_6) \end{bmatrix}$$

となり，左辺の列ベクトルを $\boldsymbol{p}$，右辺の 6 次行列を H と表せば，

$$\boldsymbol{p} = H\boldsymbol{p}$$

となる．この $\boldsymbol{p}$ は，まさに第 7 章で学ぶ固有ベクトルである．この例では

第 2 章　演習問題

特長4

[A. 基本問題]

演習 2.1 次の連立一次方程式を掃き出し法で解け．

(1) $\begin{cases} x - y + w = 5 \\ 2x - y + 2z + w = 8 \\ y + 3z - w = 2 \\ x + 3z = 7 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 3x + 2y - z = -15 \\ 5x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + y + 3z = 11 \\ 11x + 7y = -30 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} x + 2y + 3z - 2w = 2 \\ -x - y - 3z + w = -4 \\ 2x + 4y + 6z - 3w = 10 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x - 6y - 5z + 4w = 12 \\ x - 3y - z + 2w = 9 \\ -x + 3y + 2z - 2w = -7 \\ -x + 3y + 4z - 2w = -3 \end{cases}$　(5) $\begin{cases} x + 3y + 5z + 7w = 9 \\ -2x + 5y + z + 8w = -7 \\ 3x + 5y + 9z + w = 19 \\ -4x + 3y + z + 38w = -9 \end{cases}$

演習 2.2 次を満たす基本行列 P, Q およびこれらの逆行列 P^{-1}, Q^{-1} を求めよ．

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ に，ある行列 P と Q をそれぞれ左と右から掛けると，第 2 行の 3 倍を第 1 行に加え，第 3 列の 4 倍を第 1 列に加えた行列になる．

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ に，ある行列 P と Q をそれぞれ左と右から掛けると，第 2 列の 3 倍を第 1 列に加えて第 2 行と第 3 行を入れ換えた行列になる．

演習 2.3 次の連立一次方程式の解が存在するように定数 k を定め，そのときの解も求めよ．

(1) $\begin{cases} x + 2y + 3z = k \\ 2x + 3y - 2z = 2 \\ -x - y + 5z = 1 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = -2 \\ 7x + 8y + 9z = k \end{cases}$

演習 2.4 a, b を実数とし，連立一次方程式 $\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ 2x + 5y + 3z = b \\ x + y + az = 1 \end{cases}$ の係数行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ のランクを 2 とする．このとき，この連立一次方程式が解をもつように a, b の値を定め，そのときの解を求めよ．

演習 2.5 $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 & -7 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ のランクを求め，A が正則か否か判定せよ．

演習 2.6 次の行列の逆行列を掃き出し法で求めよ．

第 2 章　略解とヒント

特長3，4

[問]

問 2.1 (1) 係数行列 $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$，拡大係数行列 $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 23 \\ -4 & 3 & -7 \end{array}\right]$，(2.2) の形 $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ -7 \end{bmatrix}$，(2.4) の形 $x\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ -7 \end{bmatrix}$　(2) 係数行列 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}$，拡大係数行列 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -14 \\ 3 & 0 & -5 & 32 \end{array}\right]$，(2.2) の形 $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ 32 \end{bmatrix}$，(2.4) の形 $x\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ 32 \end{bmatrix}$　(3) 係数行列 $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$，拡大係数行列 $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -5 \\ -2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 33 \end{array}\right]$，(2.2) の形 $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 33 \end{bmatrix}$，(2.4) の形 $x\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \\ 33 \end{bmatrix}$

問 2.2 (1) $x = -1, y = 2, z = 1$　(2) 解なし　(3) α を任意の実数として，$x = 2 - \alpha$, $y = 5 + 2\alpha$, $z = \alpha$

問 2.3 (1) $P^{-1} = P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) $P^{-1} = P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

問 2.4 (1) 3　(2) 2

問 2.5 (1) 2　(2) 20

問 2.6 $a = -2$ かつ $b \neq -7$

問 2.7 (1) 正則 (ランク 4)　(2) 正則でない (ランク 2)

問 2.8 (1) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b}) = 3$，一意解が存在．　(2) $\mathrm{rank}(A) = 2 < 3 = \mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b})$，解は存在しない．　(3) $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A|\boldsymbol{b}) = 2$，解は無数に存在．

問 2.9 (1) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -9 & 7 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 5 & -13 & 22 \\ -2 & 5 & -8 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$　(3) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$

問 2.10 α を任意の実数とする．(1) $\mathrm{rank}(A) = 3$ より自明解のみ存在．$x = y = z = 0$　(2) $\mathrm{rank}(A) = 2 < 3$ より非自明解が存在．$x = -\alpha$, $y = -\alpha$, $z = \alpha$　(3) $\mathrm{rank}(A) = 2 < 3$ より非自明解が存在．$x = -\alpha$, $y = 2\alpha$, $z = \alpha$

問 2.11 α を任意の実数とする．$\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

[演習]

演習 2.1 以下，α, β は任意の実数とする．　(1) $x = -5$, $y = -10 + \alpha$, $z = 4$, $w = \alpha$　(2) $x = -4$, $y = 2$, $z = 7$　(3) $x = 6 - 3\alpha$, $y = 4$, $z = \alpha$, $w = 6$　(4) $x = 11 + 3\alpha - 2\beta$, $y = \alpha$, $w = \beta$, $z = 2$　(5) $x = 2 + 11\alpha$, $y = -1 + 4\alpha$, $z = 2 - 6\alpha$, $w = \alpha$

演習 2.2 (1) $P = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

例題 3.9（非自明解の存在）

連立一次方程式 $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 3x+4y+5z=0 \end{cases}$ の自明解・非自明解の存在を調べよ.

（解答）

$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ とすれば，$|A|=0$ なので，定理 3.13 より，与えられた連立一次方程式は非自明解をもつ.

■

[問] 3.9　次の連立一次方程式が，非自明解をもつように k の値を定めよ.

(1) $\begin{cases} 2x+ky=0 \\ 3x+4y=0 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ -2x+3y-2z=0 \\ -x+ky+2z=0 \end{cases}$

各章にまとめを配置

第 3 章のまとめ

- 2 次正方行列の行列式の絶対値は，平面上の平行四辺形の面積に等しい.
- 2 次正方行列と 3 次正方行列の行列式を計算する際には，サラスの計算法を用いる．ただし，サラスの計算法は 4 次以上の正方行列には使えない.
- n 次正方行列 A, B に対して $|{}^tA| = |A|$ と $|AB| = |A||B|$ が成り立つ.
- 行列式の計算をする際には，余因子展開や行列式の性質を使う．行列式の性質を使う際は，行列式を三角行列の形に変形する.
- 正方行列 A の逆行列 A^{-1} は，行列式 $|A|$ と余因子行列 $\widetilde{A}$ で表せる．余因子行列の (i,j) 成分は $\Delta(A)_{ji}$ であることに注意.
- 正方行列 A が正則であるための必要十分条件は $|A| \neq 0$.
- 連立一次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は，クラメールの公式で具体的に表現できる.

アクティブ・ラーニング活動例を提示

▶【アクティブ・ラーニング】
まとめに記載されている項目について，例を交えながら他の人に説明しよう．また，あなたならどのように本章をまとめますか？あなたの考えで本章をまとめ，それを他の人とも共有し，自分たちオリジナルのまとめを作成しよう.

▶【アクティブ・ラーニング】
本章で登場した例題および問において，重要な問題を 5 つ選び，その理由を述べてください．その際，選定するための基準は，自分たちで考えてください.

第 4 章　平面ベクトルと空間ベクトル

[ねらい]

読者の多くは高校数学 B で「ベクトル」を学んでいるだろうが，念のため，平面ベクトルと空間ベクトルについて簡単に復習する．また，行列を使って平面ベクトルを移動させる方法や空間ベクトルと行列式の関係などについても学ぶ．

[この章の項目]

平面ベクトル，空間ベクトル，ベクトルの成分表示，正射影，内積，直線と平面の方程式，平面上の一次変換（回転，鏡映），外積

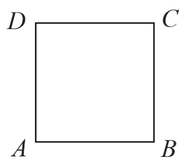
高校数学との
違いを明記

4.1　ベクトルとその大きさ

平面あるいは空間における 2 点 P, Q を考える．始点(starting point) P から終点(terminal point) Q に至る矢印のことを有向線分(directed segment) といい，これを $\overrightarrow{PQ}$ で表す．ベクトル とは，この有向線分のことである．また，線分 PQ の長さをベクトルの大きさ (magnitude) あるいはノルム (norm) といい，$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ}$ としたとき，$\|\boldsymbol{a}\|$ で表す．特に，大きさが 1 のベクトルを単位ベクトル (unit vector) という．

そして，有向線分 $\overrightarrow{P'Q'}$ が $\overrightarrow{PQ}$ と同じ大きさと同じ方向をもつとき，$\overrightarrow{P'Q'}$ と $\overrightarrow{PQ}$ はベクトルとして等しい といい，$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$ と表す．したがって，$\overrightarrow{PQ}$ を平行移動して得られるすべての有向線分は $\overrightarrow{PQ}$ と等しい．そこで，$\overrightarrow{PQ}$ にベクトルとして等しい有向線分はすべて同一のベクトルを表すと考え，まとめて幾何ベクトル または単にベクトル と呼ぶ

例えば，一辺の長さが 1 の正方形 $ABCD$ において，$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ であり，$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DC}$ は単位ベクトルである．

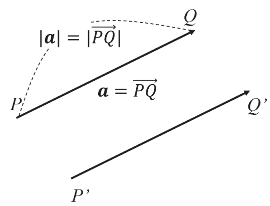


なお，平面上のベクトルのことを平面ベクトル (vectors in the plane)，空間のベクトルのことを空間ベクトル (vectors in a three-dimensional coordinate space)，などと呼ぶ．

▶ [ベクトルの表記]

高校数学の教科書では，$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{PQ}$ を $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ のように表すが，本書ではベクトルを $\boldsymbol{a}$ のように太字で表す．また，高校数学ではベクトルの大きさを $|\vec{a}|$ と表したが，本書では $\|\boldsymbol{a}\|$ と表す．その方が，実数 c の絶対値 $|c|$ とベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさ $\|\boldsymbol{a}\|$ の区別がつきやすい．なお，本によっては，ベクトルの大きさを $|\boldsymbol{a}|$ と表すこともある．

▶ [ベクトルと大きさ]



$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'}$