

木田雅成「連分数」近代科学社
訂正および変更
2024年4月17日

初版第二刷の訂正

p.153, l.12

$$\begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ b_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 u_1 & 1 \\ b_1 u_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 u_2 & 1 \\ b_1 u_2 u_1 & 0 \end{bmatrix} \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} a_0 & 1 \\ b_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 u_1 & 1 \\ b_1 u_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 u_1 & 1 \\ b_2 u_2 u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

定理 6.8 の証明の最後の部分 最小の n をとると, α_n が繰り返し現れることの証明が自明でないという指摘を受けました. 例えば次のようにすれば良いです.

「 $R_2(D)$ は有限集合であるから, n より大きい $m, \ell (m < \ell)$ が存在して $\alpha_m = \alpha_\ell$ が成り立つ. ここで $\alpha_m \sim \alpha_n$ なので, $A \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ を使って, $A\alpha_m = \alpha_n$ と書ける. $\alpha_m = \alpha_\ell$ の両辺に A を作用させると, $A\alpha_m = \alpha_n = A\alpha_\ell$. すなわち, $\alpha_n = \alpha_\ell$ となる ℓ が存在する.」
ここで A は α_m を α_n に巻き戻す行列です. 同じだけ α_ℓ を巻き戻しておけば, α_n が繰り返すことがわかります.

循環連分数になることだけを示すのであれば, 「 $R_2(D)$ は有限集合であるから, n より大きい $m, \ell (m < \ell)$ が存在して $\alpha_m = \alpha_\ell$ が成り立つ. このとき $\alpha_{m+s} = \alpha_{\ell+s}$ が $s = 0, 1, \dots$ に対して成り立つ. これは $\alpha = [a_0; a_1, \dots, \overline{a_m, \dots, a_{\ell-1}}]$ を示す.」 でよいでしょう.

p.146, l.11
$$\llbracket a_0+1; \underbrace{2, \dots, 2}_{a_1-1 \text{ 個}}, a_2+2, \dots, \underbrace{2, \dots, 2}_{a_{k-1}-1 \text{ 個}}, a_k+2, \bar{2} \rrbracket = [a_0; a_1, \dots, a_k]$$

初版第一刷の訂正

p.4 問 1.1 (iii) $C(a) \cap C(b) = \emptyset \rightarrow C(a) \cap C(b) \neq \emptyset$

p.9 l.1 右側の行列の (1, 1) 成分: $77 \rightarrow 89$

p.10 l.1 「(2.4) 両辺の行列式」 \rightarrow 「(2.4) の両辺の行列式」

p.21, 系 3.13 「数列 (q_n) は単調増加列で」 → 「数列 (q_n) は $n \geq 1$ に対して単調増加列で」

p.21, 系 3.13, 証明の 2 行目 「 $n = 0, 1$ のとき成り立つ」 → 「 $n = 1$ のとき成り立つ」

p.22, 下から 1.8 不等号を次のように訂正.

$$[a_{k+1}; a_{k+2}, \dots, a_n] > [[a_{k+1}; a_{k+2}, \dots, a_n]] = a_{k+1} \geq 1$$

p.26, 下から 1.6

$$(a_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, \dots, a_n]$$

p.30, 系 4.6 最初に「 $k \geq 1$ のとき,」を挿入.

p.31, 命題 4.7 の証明の 7 行目 「したがって $n = 1$ 」 → 「したがって $n = 0$ 」

p.31, 命題 4.7 の証明の 10 行目 左側の等号を $<$ にする. つまり

$$0 < \frac{p_1}{q_1} - \alpha < \frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{1 + a_2} \leq \frac{1}{2}$$

p.32 命題 4.8 とその証明を次のように変更

命題. p_n/q_n ($n > 1$) を無理数 α の近似分数とする.

$$\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}, \quad 0 < q \leq q_n$$

をみたま任意の有理数 p/q に対して

$$|q\alpha - p| \geq |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| > |q_n\alpha - p_n|$$

が成立する. 特に,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right|$$

が成り立つ.

Proof. 系 4.6 から

$$|q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| > \frac{1}{q_{n+1}} > |q_n\alpha - p_n|.$$

これで最初の式の右側の不等号が示された。左側の不等式を示そう。

c, d を変数とする連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$$

を考える。(3.3) から係数行列の行列式が $(-1)^{n+1}$ なので、整数解 c, d をもつ。これを解くと、

$$c = (-1)^{n+1}(pq_{n-1} - p_{n-1}q), \quad d = (-1)^{n+1}(p_nq - q_np).$$

命題の仮定から $d \neq 0$ である。また $c = 0$ ならば、連立一次方程式から

$$|q\alpha - p| = |d(q_{n-1}\alpha - p_{n-1})| \geq |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$$

が成り立つ。

よって以下では $c \neq 0$ とする。仮定 $q_n > q = cq_n + dq_{n-1}$ から $(c-1)q_n + dq_{n-1} < 0$ 。ここで $q > 0$ により、 c, d がともに負であることはないから、これから c, d は異符号であることがわかる。一方 $q_n\alpha - p_n$ と $q_{n-1}\alpha - p_{n-1}$ も異符号である。したがって $c(q_n\alpha - p_n)$ と $d(q_{n-1}\alpha - p_{n-1})$ は同符号である。これから、

$$\begin{aligned} |q\alpha - p| &= |c(q_n\alpha - p_n)| + |d(q_{n-1}\alpha - p_{n-1})| \\ &> |d(q_{n-1}\alpha - p_{n-1})| \geq |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|. \end{aligned}$$

以上により、いずれの場合でも

$$|q\alpha - p| \geq |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}|$$

が成り立つ。

最後の主張は $q \leq q_n$ を考えれば

$$\begin{aligned} \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| &= \frac{1}{q} |q\alpha - p| > \frac{1}{q} |q_{n-1}\alpha - p_{n-1}| \\ &= \frac{q_n}{q} \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \end{aligned}$$

によりわかる。 □

p.33 証明のあとの2行目 このままでも間違いではないが「 $0 < q \leq Q$ 」に修正.

p.34 補注 4.10, 1.3 「その手前の近似分数の」 → 「近似分数 p_n/q_n による」

p.36 3つ目の● 「西暦が400で」 → 「ただし西暦が400で」

p.40 下から1.2 「 $ad - bc$ の曖昧さが」 → 「 $ad - bc$ の符号の曖昧さが」

p.42 側注17 この側注を次のように変更する. 「連分数 $[1; 2, \overline{1, 2}]$ のように循環節が最初から始まる場合は, セミコロンを省略して $\overline{[1, 2]}$ と書くことにする.

p.43 1.12 「 $= p_k/q_k$ で, $c > 0$ より」 → 「 $= p_k/q_k$ が成り立つが, $c > 0$ より」

p.52 下から1.9
$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha' \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha' \end{vmatrix}^2$$

p.54 命題6.13の証明の1行目 「 α が $ax^2 + bx + c$ の根であるとする」と → 「 α は $ax^2 + bx + c$ の根となるので」

p.70 1.7 「 $n = 1$ で最小で正になり, 基本解に対応する」 → 「 $n = 1$ で最小になる. 以降で(7.2)の解は上のように α の連分数展開を使ってすべて得られることを示すので, この $n = 1$ のときの解が基本解に対応する」

p.72 定理7.8の証明の4行目 「 $\xi < 0, \eta < 0$ のみたすもの」 → 「 $\xi < 0, \eta < 0$ のみたすもの」

p.83 定理8.11の証明 3行目に次を挿入. 「また $\text{Tr}(\varepsilon) = x \in \mathbb{Z}$ であるから, 補題8.4より ε は代数的整数になり, さらに, 命題8.10....」

p.85 命題8.15 命題の最後に次を挿入. 「ここで, 例えば(8,3)の $(a_1, \dots, a_{t-1}) = (a_{t-1}, \dots, a_1)$ は2つの有限数列 (a_1, \dots, a_{t-1}) と (a_{t-1}, \dots, a_1) が一致することを示す.

p.85 補題8.16 (i) 「 $b = 0$ ならば, 行列」

p.86 補題8.16 (ii) 「 $a \neq 0$ ならば, 行列」

p.94 問 8.6 の前に次の一文を挿入する. 「Fermat の 2 平方和定理にはいろいろな証明が知られているが, この証明では $p = x^2 + y^2$ の解が連分数展開から具体的に求められるのがおもしろい.」

p.95 2 つ目の● 「判別式 D の」 → 「正の判別式 D の」

p.130 定義 13.2 「定数多項式に等しいとき」 → 「定数多項式に等しくなるならば,」

p.130 式 (13.3) 分母の大きなカッコをとる.

p.131 1.5,6,8 これらの行の 3 つの式から等号をとる.

p.131 定理 13.5 定理 13.5 の下に以下を挿入. 「Roth の定理から $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$ をみたす有理数 p/q は有限個になることがわかるので,」

p.131 下から 3 行目 「分母の 2 を」 → 「分母の指数に現れる 2 を」

p.131 (13.4) の右辺 $\frac{c}{q^{\frac{n}{2}+\varepsilon}} \rightarrow \frac{c}{q^{\frac{n}{2}+1+\varepsilon}}$

p.132 証明 証明の初めに 「 a_n を正と仮定してよい.」 を挿入.

p.133, 1.9 実際に Thue 方程式が完全に解けるときには解の個数の上限がわかるわけですが, 理論的にわかる部分を考慮して「解の個数の上限」を「解の個数の具体的な上界」に変更します.

著者紹介 「線形代数学講義 (培風館, 2013 年)」 → 「線形代数学講義 [増訂版] (培風館, 2023 年)」

足立恒雄先生, 中島匠一先生, 青木美穂先生をはじめ, 間違い等を指摘くださったみなさまに感謝いたします.