2023.5.18

ストラング：教養の線形代数

練習問題の解答

松崎 公紀・平鍋 健児

LINEAR ALGEBRA FOR EVERYONE

MANUAL FOR INSTRUCTORS

Gilbert Strang

Massachusetts Institute of Technology

math.mit.edu/weborder.php (orders)

math.mit.edu/∼gs

www.wellesleycambridge.com

Wellesley - Cambridge Press

Box 812060

Wellesley, Massachusetts 02482

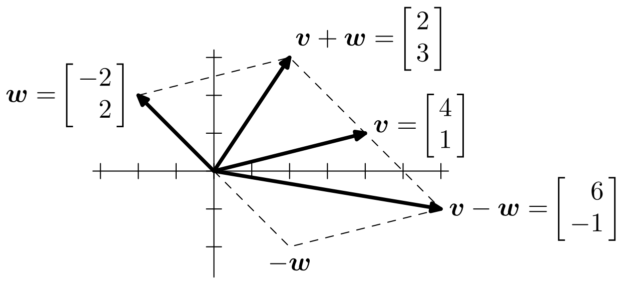
練習問題 1.1（9 ページ）

1 $c = ma$ と $d = mb$ より $ad = amb = bc$ となる．(a, b, c, d がいずれもゼロでないとき，式 $ad = bc$ は，a, b, c, d を成分とする 2×2 行列がランク 1 行列であることと等価である．)

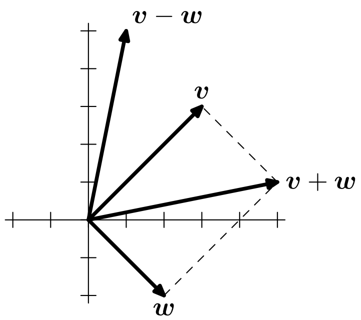
2 三角形を 1 周する 3 つの辺は $\boldsymbol{u} = (5, 0), \boldsymbol{v} = (-5, 12), \boldsymbol{w} = (0, -12)$ である．それらの和は $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = (0, 0)$ である．長さは $||\boldsymbol{u}|| = 5, ||\boldsymbol{v}|| = 13, ||\boldsymbol{w}|| = 12$ である．($5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$ より，この三角形は 3 辺が $5, 12, 13$ である直角三角形である．$3, 4, 5$ の直角三角形の次に登場する良い数だ．)

3 線形結合の全体は (a) $\mathbb{R}^3$ における直線，(b) $\mathbb{R}^3$ における平面，(c) $\mathbb{R}^3$ の全体となる．

4 $(0, 0)$ から伸びる $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ がそれぞれ辺であるような平行四辺形を考えると，$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (2, 3)$ と $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = (6, -1)$ はその平行四辺形の対角線となる．



5 この問題は，平行四辺形の 2 つの対角線 $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (5, 1)$ と $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = (1, 5)$ から 2 辺 $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ を求めるもので，問題 **4** の逆である．この問題では，$\boldsymbol{v} = (3, 3)$ と $\boldsymbol{w} = (2, -2)$ である．これらは，$\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})$ と $\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})$ より求まる．

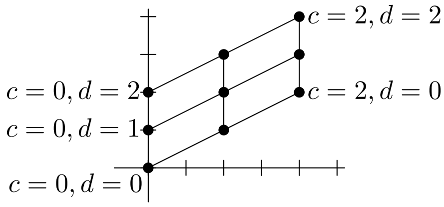


6 $3\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (7, 5)$ および $c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w} = (2c + d, c + 2d)$．

7 $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (0, 0, 0)$ および $2\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = (-2, 3, 1)$．$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ が $(0, 0, 0)$ となるので，ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ はある平面内にある．言い換えると，$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ が張る平面内にある．

8 $\boldsymbol{v} = (1, -2, 1)$ の成分の和がゼロであり，かつ，$\boldsymbol{w} = (0, 1, -1)$ の成分の和がゼロであるため，すべての $c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w}$ について成分の和がゼロである．$c = 3$ と $d = 9$ のとき，$3\boldsymbol{v} + 9\boldsymbol{w} = (3, 3, -6)$ となる．$3 + 3 + 6$ がゼロでないので，$c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{w} = (3, 3, 6)$ には解がない．

9 $c = 0, 1, 2$ と $d = 0, 1, 2$ に対する $c(2, 1) + d(0, 1)$ の 9 通りの線形結合は,（傾いた）格子上にある．c と d がすべての整数をとるとすると，その（傾いた）格子は平面全体に広がる．



10　4 つ目の頂点となりうる点は，$(4,4)$ と $(4,0)$ と $(-2,2)$ である．3 通りの平行四辺形となりうる．(絵は省略)

11　残りの 4 つの頂点は $(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)$ である．立方体の中心は $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ である．6 つの面の中心はそれぞれ $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1),(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})$ である．辺は 12 本ある．

12　$\boldsymbol{i}=(1,0,0)$ と $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}=(1,1,0)$ の線形結合の全体は xyz 空間内の xy 平面となる．

13　(a) 和はゼロベクトルとなる．(b) 和 $=-$(2:00 を指すベクトル $=$ (8:00 を指すのベクトル)．(c) 2:00 を指すベクトルは，水平方向から 30° の方向にあり，$(\cos\frac{\pi}{6},\sin\frac{\pi}{6})=(\sqrt{3}/2,1/2)$ である．

14　原点を $6:00$ の位置に動かすと，すべてのベクトルに $\boldsymbol{j}=(0,1)$ が足される．したがって，12 個のベクトルの和は $\mathbf{0}$ から $12\boldsymbol{j}=(0,12)$ に変わる．

15　前半：$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ が同じ方向を向いている（逆方向でもよい）．後半：$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ の（非自明な）線形結合でゼロベクトルとなるものがあり，それら 3 つのベクトルが 1 つの直線上にない．

16　2 つの等式は $c+3d=14$ と $2c+d=8$ である．その解は $c=2$ と $d=4$ である．

17　点 $\dfrac{3}{4}\boldsymbol{v}+\dfrac{1}{4}\boldsymbol{w}$ は，$\boldsymbol{w}$ から $\boldsymbol{v}$ へ，その 4 分の 3 だけ行ったところである．点 $\dfrac{1}{4}\boldsymbol{v}+\dfrac{1}{4}\boldsymbol{w}$ は，原点から $\boldsymbol{u}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{v}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{w}$ へ，その半分だけ行ったところである．点 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ は $2\boldsymbol{u}$（平行四辺形の原点から遠い頂点）である．

18　$0\le c\le 1$ と $0\le d\le 1$ を満たす線形結合 $c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$ の全体は，辺が $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ である**平行四辺形の内部全体**となる．例えば，$\boldsymbol{v}=(1,0)$ と $\boldsymbol{w}=(0,1)$ のとき，$c\boldsymbol{v}+d\boldsymbol{w}$ の全体は単位正方形の内部全体となる．$\boldsymbol{v}=(a,0)$ と $\boldsymbol{w}=(b,0)$ のような特別な場合には，それらの線形結合はある線分にしかならない．

$c\ge 0$ と $d\ge 0$ のとき，$\boldsymbol{v}$ 方向と $\boldsymbol{w}$ 方向の間で無限に広がる「錐形」（または「くさび」）となる．例えば，$\boldsymbol{v}=(1,0)$ と $\boldsymbol{w}=(0,1)$ のとき，その錐形は第 1 象限全体（$x\ge 0$ かつ $y\ge 0$）となる．

質問：$\boldsymbol{w}=-\boldsymbol{v}$ のときはどうか．錐形は半平面へと広がるが，$\boldsymbol{v}=(1,0)$ と $\boldsymbol{w}=(-1,0)$ の線形結合の全体はある直線にしかならない．

19　(a) $\frac{1}{3}\boldsymbol{u}+\frac{1}{3}\boldsymbol{v}+\frac{1}{3}\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ で作られる三角形の中心となる．$\frac{1}{2}\boldsymbol{u}+\frac{1}{2}\boldsymbol{w}$ は，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{w}$ の中点となる．(b) 三角形の内部となるのは，$c\ge 0, d\ge 0, e\ge 0, c+d+e=\mathbf{1}$ のときである．

20　和 $=(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{w})=$ **ゼロベクトル**．それら三角形の 3 辺は 1 つの平面内にある．

21　$c+d+e=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}>1$ より，ベクトル $\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ は錐形の**外側**にある．

22 3 次元空間内のすべてのベクトルは,（1 つの平面内にない）$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ の線形結合により作ることができる．$c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}$ の全体が平面となり，$e\boldsymbol{w}$ の形のすべてのベクトルを足すと $\mathbb{R}^3$ 全体となる．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が 1 つの平面内にあるとき，答が異なる.

23 4 次元の超立方体には，頂点が $2^4 = 16$ 個，3 次元面が $2 \cdot 4 = 8$ 個，辺が 32 個ある（2 次元面は 24 個ある）.

24 （事実 : ある平面内にある任意の 3 つのベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ に対し，ゼロベクトルとなる非自明な線形結合 $c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v}+e\boldsymbol{w}$ がある（自明な $c = d = e = 0$ 以外で．したがって，$\boldsymbol{b}$ となる線形結合 $C\boldsymbol{u}+D\boldsymbol{v}+E\boldsymbol{w}$ が 1 つあれば，そのような線形結合は多数ある．特殊解 C, D, E に c, d, e や $2c, 2d, 2e$ を足せば作れる.）

問題の例では，$3\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = 3(1,3)-2(2,7)+1(1,5) = (0,0)$ が成り立つ．また，$-2\boldsymbol{u}+1\boldsymbol{v}+0\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b} = (0,1)$ が成り立つ．これら 2 つの式を足すと，$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (0,1)$ が得られる．この例では，$(c, d, e) = (3, -2, 1)$ であり，$(C, D, E) = (-2, 1, 0)$ である.

$\boldsymbol{b}$ となる線形結合が存在しないような $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ はありうるだろうか. 答はイエスだ. ベクトル $(1,1), (2,2), (3,3)$ は 1 つの直線上にあり，$\boldsymbol{b}$ となる線形結合は存在しない．$c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v} + e\boldsymbol{w} = 0$ は簡単に解くことができるが，$C\boldsymbol{u} + D\boldsymbol{v} + E\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}$ には解が存在しない.

25 $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ が $(0,0)$ を通る 1 つの直線上になければ，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の線形結合の全体は平面となる．線形結合の全体が 4 次元空間全体となるような 4 つのベクトルの一例は，$(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)$ からなる「標準基底」である.

26 $c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v} + e\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}$ に対応する 3 つの等式は，$2c - d = 1$，$-c + 2d - e = 0$，$-d + 2e = 0$ である．3 つ目の等式から $d = 2e$ であり，2 つ目の等式に代入すると $c = 3e$ であり，1 つ目の等式に代入すると $4e = 1$ となる．よって，$e = 1/4, d = 2/4, c = 3/4$ となる.

練習問題 1.2（18 ページ）

1 $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = -2.4+2.4 = 0, \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} = -0.6+1.6 = 1, \boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} = 0 + 1 = 1, \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} = 4+6 = 10.$ なお，$\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ である.

2 ベクトルの長さは $\|\boldsymbol{u}\| = 1$，$\|\boldsymbol{v}\| = 5$，$\|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{5}$ である．このとき，$|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| = 0 < 1 \times 5$ および $|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}| = 10 < 5\sqrt{5}$ より，シュワルツの不等式が成り立つことが確認できる.

3 単位ベクトルは $\boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\| = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}) = (0.8, 0.6)$ と $\boldsymbol{w}/\|\boldsymbol{w}\| = (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ である．ベクトル $\boldsymbol{w}, (2, -1), -\boldsymbol{w}$ は，それぞれ，$\boldsymbol{w}$ に対して角度 $0°, 90°, 180°$ をなす．θ の余弦は，$\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \cdot \frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|} = 10/5\sqrt{5} = 2/\sqrt{5}$ である.

4 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を任意の単位ベクトルとする．(a) $\boldsymbol{v} \cdot (-\boldsymbol{v}) = -1$. (b) $(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) \cdot (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w} = 1 + (\quad) - (\quad) - 1 = 0$ よって $\theta = 90°$ （$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}$ に注意せよ）. (c) $(\boldsymbol{v} - 2\boldsymbol{w}) \cdot (\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} - 4\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w} = 1 - 4 = -3$.

5 $\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|=(1,3)/\sqrt{10}$ と $\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{w}/\|\boldsymbol{w}\|=(2,1,2)/3$ である．$\boldsymbol{U}_1=(3,-1)/\sqrt{10}$ は $\boldsymbol{u}_1$ に直交する（$(-3,1)/\sqrt{10}$ も $\boldsymbol{u}_1$ に直交する）．$\boldsymbol{U}_2$ の一例は $(1,-2,0)/\sqrt{5}$ である．$\boldsymbol{u}_2$ に直交するベクトルはある平面をなし，$\boldsymbol{u}_2$ に直交する単位ベクトルはその平面上の単位円をなす．

6 (a) $\boldsymbol{w}=(c,2c)$ という形のすべてのベクトルが $\boldsymbol{v}=(2,-1)$ に直交する．そのようなベクトルは直線上にある．(b) $x+y+z=0$ を満たすすべてのベクトル (x,y,z) は，**平面**上にある．(c) $(1,1,1)$ と $(1,2,3)$ の両方に直交するすべてのベクトルは，3 次元空間の**直線**上にある．

7 (a) $\cos\theta=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}/\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|=1/(2\times 1)$ より $\theta=60°$ （または $\theta=\pi/3$ ラジアン）．(b) $\cos\theta=0$ より $\theta=90°$ （または $\theta=\pi/2$ ラジアン）．(c) $\cos\theta=2/(2\times 2)=1/2$ より $\theta=60°$ （または $\theta=\pi/3$ ラジアン）．(d) $\cos\theta=-5/\sqrt{10}\sqrt{5}=-1/\sqrt{2}$ より $\theta=135°$ （または $\theta=3\pi/4$ ラジアン）．

8 (a) 偽．$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ は，$\boldsymbol{u}$ に直交する平面内の任意の 2 つのベクトルでよい．(b) 真．なぜなら，$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{w})=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}=0$．(c) 真．$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}=0$ のとき，$\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\|^2=(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})$ を展開すると $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=2$ となる．

9 $v_2w_2/v_1w_1=-1$ のとき，$v_2w_2=-v_1w_1$ が成り立つ．これより，$v_1w_1+v_2w_2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=0$．よって $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ は直交する．ベクトル $(1,4)$ と $(1,-\frac{1}{4})$ は，内積が $1-1=0$ となるので直交する．

10 傾き $2/1$ と $-1/2$ の積は -1 である．このとき，$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}=0$ であり，2 つのベクトル（矢印の方向）は直交する．

11 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}<0$ のとき，その角度は $90°$ より大きい．$\boldsymbol{w}$ の全体は 3 次元空間の半分となる．(図示は省略)

12 $(1,1)$ が $(1,5)-c(1,1)$ に直交するのは，$(1,1)\cdot(1,5)-c(1,1)\cdot(1,1)=6-2c=0$ が成り立つときである（そのとき $c=3$ である）．$\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{w}-c\boldsymbol{v})=0$ となるのは，$c=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}/\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$ が成り立つときである．$c\boldsymbol{v}$ を引くことで直交なベクトル $\boldsymbol{w}-c\boldsymbol{v}$ を作るのが鍵だ．訳注：この考え方は，4 章で扱う射影である．

13 互いに直交となるベクトルの組の一例は $\boldsymbol{u}=(1,-1,0,0),\boldsymbol{v}=(0,0,1,-1),\boldsymbol{w}=(1,1,-1,-1)$ および $(1,1,1,1)$ である．補足：それら $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$ を $(1,1,1,1)$ に直交する 3 次元超平面内で回転したとしても，互いに直交という性質は保たれる．

14 $\frac{1}{2}(x+y)=(2+8)/2=5$ は $5>4$ を満たす．$\cos\theta=2\sqrt{16}/\sqrt{10}\sqrt{10}=8/10$．

15 $\|\boldsymbol{v}\|^2=1+1+\cdots+1=9$ より $\|\boldsymbol{v}\|=3$．$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}/3=(\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{3})$ は 9 次元空間における単位ベクトルである．$\boldsymbol{w}=(1,-1,0,\ldots,0)/\sqrt{2}$ は，$\boldsymbol{v}$ に直交する 8 次元超平面に含まれる単位ベクトルの 1 つである．

16 $\cos\alpha=1/\sqrt{2}$，$\cos\beta=0$，$\cos\gamma=-1/\sqrt{2}$．任意のベクトル $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$ に対し，3 つの軸方向との角度の余弦は $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=(v_1^2+v_2^2+v_3^2)/\|\boldsymbol{v}\|^2=1$ となる．(問題の訂正：$\theta\to\gamma$)

17 $\|\boldsymbol{v}\|^2=4^2+2^2=20$ および $\|\boldsymbol{w}\|^2=(-1)^2+2^2=5$．斜辺 $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=(3,4)$ に対し，三平方の定理の式は $\|(3,4)\|^2=25=20+5$ となる．

18 $||\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}||^2=(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})+\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$．これを展開すると，$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}$ となる（さらに，$||\boldsymbol{v}||^2+2||\boldsymbol{v}||\,||\boldsymbol{w}||\cos\theta+||\boldsymbol{w}||^2$ に等しい）．

19 $(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}$ において，$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ を $\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|\cos\theta$ とすると余弦定理となる．ここで θ は，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の間の角度である.（$\theta<90°$ のとき，内積 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ は正であり，$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}$ は $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|^2$ よりも大きい．$\theta<90°$ もしくは $\theta>90°$ のとき，三平方の定理の等式 $a^2+b^2=c^2$ が不等式になる.）

20 $2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}\leq 2\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|$ より $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|^2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}\leq\|\boldsymbol{v}\|^2+2\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|+\|\boldsymbol{w}\|^2$ となる．この式の右辺は $(\|\boldsymbol{v}\|+\|\boldsymbol{w}\|)^2$ に等しい．両辺に対しそれぞれ平方根をとると，三角不等式 $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\|\leq\|\boldsymbol{v}\|+\|\boldsymbol{w}\|$ が得られる．

21 $v_1^2w_1^2+2v_1w_1v_2w_2+v_2^2w_2^2\leq v_1^2w_1^2+v_1^2w_2^2+v_2^2w_1^2+v_2^2w_2^2$ は正しい（4 つの項が打ち消し合う）．なぜなら，右辺から左辺を引いた差が $v_1^2w_2^2+v_2^2w_1^2-2v_1w_1v_2w_2=(v_1w_2-v_2w_1)^2\geq 0$ であるからだ.

22 幾何平均が算術平均より小さい（問題 14）ことより $|u_1||U_1|\leq\frac{1}{2}(u_1^2+U_1^2)$ および $|u_2||U_2|\leq\frac{1}{2}(u_2^2+U_2^2)$ が言える．$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{U}=0.96$ であり，式の全体は $0.96\leq 0.6\times 0.8+0.8\times 0.6\leq\frac{1}{2}(0.6^2+0.8^2)+\frac{1}{2}(0.8^2+0.6^2)=1$ となる．$0.96<1$ より，これは正しい．

23 θ の余弦は $\cos\theta=x/\sqrt{x^2+y^2}$ であり，1 辺の長さを斜辺の長さで割ったものである．このとき，$x^2/(x^2+y^2)\leq 1$ より，$|\cos\theta|^2$ が 1 より大きくなることはない．

24 次の 2 式の右辺の和は $2||\boldsymbol{v}||^2+2||\boldsymbol{w}||^2$ となる．

$$||\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}||^2=(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}$$
$$||\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}||^2=(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})\cdot(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}-\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}$$

25 $\|\boldsymbol{v}\|=5$ と $\|\boldsymbol{w}\|=3$ に対する三角不等式より，長さ $\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\|$ は 2 から 8 の値をとる．シュワルツの不等式より，内積 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ は -15 から 15 の値をとる．

26 平面内の 3 本のベクトルが，互いに 90° より大きな角度をなすことはありうる．例えば，$(1,0),(-1,4),(-1,-4)$．平面内で，4 つのベクトルが互いに 90° より大きな角度をなすことは**あり得ない**（角度の合計が 360° でなければならない）．$\mathbb{R}^3$ や $\mathbb{R}^n$ において，互いに 90° より大きな角度をなすようなベクトルはいくつとれるか．この問の答は，Ben Harris と Greg Marks により，$n+1$ だと示された．$\mathbb{R}^n$ における正単体（2 次元における正三角形，3 次元における正四面体，$\cdots$）において，中心から $n+1$ 個の頂点へのベクトルは互いに内積が負である．$\mathbb{R}^n$ において $n+2$ 個のベクトルが互いに負の内積を持つとする．このとき，最後のベクトルに直交する超平面へ射影すると，$\mathbb{R}^{n-1}$ 次元において互いに内積が負である $n+1$ 本のベクトルが得られる．このような射影の操作を続けていくと，$\mathbb{R}^2$ における 4 本のベクトルが互いに負の内積を持つことになるが，これはあり得ない.

27 4×4 の「アダマール行列」（に $\frac{1}{2}$ を掛けた行列）の列は，互いに直交する単位ベクトルである．

$$\frac{1}{2}H=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

上の行列の 4 つの列は，長さが $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$ である．任意の 2 つの列の内積はゼロである．

28 コマンド $V = \mathbf{randn}\,(2,30); D = \mathbf{sqrt}\,(\mathbf{diag}\,(V' * V));\ U = V \backslash D;$ により，30 本のランダムな単位ベクトルが U の列となる．さらに，$\boldsymbol{u}' * U$ により 30 個の内積からなる行ベクトルができ，その絶対値の平均は $2/\pi$ に近い値となる．訳注：もともとの問題は 3 次元ベクトルを扱っていたが，3 次元ベクトルで同じことを行うと絶対値の平均は 1/2 となる．

29 4 つのベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ の和がゼロベクトルでなければならない．そのとき，四辺形の 4 つの頂点は，0，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3$ となる．上の条件だけでは，辺のベクトル $\boldsymbol{v}_i$ が交差することがあり得る．辺のベクトルが交差しないことを保証するには，どのような条件が必要だろうか．

練習問題 1.3（29 ページ）

1 A_1 の列空間 $\mathbf{C}(A_1)$ は，$\mathbb{R}^3$ における平面である．A_1 の 2 つの列は線形独立である．列空間 $\mathbf{C}(A_2)$ は，$\mathbb{R}^3$ 全体である．列空間 $\mathbf{C}(A_3)$ は，$\mathbb{R}^3$ における直線である．列空間 $\mathbf{C}(A_4)$ は，ゼロベクトルのみからなる点である．

2 両方の行列に対して，線形結合 $A\boldsymbol{x} = (\text{第 1 列}) - 2(\text{第 2 列}) + (\text{第 3 列})$ はゼロベクトルとなる．これにより，線形独立な列が 2 個だと分かる．したがって，$\mathbf{C}(A)$ は $\mathbb{R}^3$ における（2 次元）平面である．

3 行列 B には線形独立な列が 2 個あるので，その列空間は平面である．行列 C の線形独立な列は B と同じ 2 列であり，その列空間は B の列空間と同じになる．

4 $A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \\ 2 \end{bmatrix}$ 典型的な線形結合は $2 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 5 = 14$ $\quad B\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 18 \end{bmatrix} \quad I\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$

5 $A\boldsymbol{x} = 1\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$B\boldsymbol{y} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 10\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$I\boldsymbol{z} = z_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

6 A には線形独立な列は 2 個あり，B には 3 個あり，$A+B$ にも 3 個ある．これらの数は，それぞれ A，B，$A+B$ のランクである．ランクについて $\text{rank}(A+B) \le \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ という規則が成り立つ．

7 (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ $A + B = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$ $A + B$ のランクは 1.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $A + B$ のランクは 0.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $A + B = I$ のランクは 4.

8 A の列空間は $\mathbb{R}^3$ 全体である．B の列空間は $\mathbb{R}^3$ における**直線**である．C の列空間は $\mathbb{R}^3$ における 2 次元平面である．C にゼロ行を追加したとすると，その列空間は $\mathbb{R}^4$ における 2 次元平面となる．

9 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ランクが 3 となるには，1 の個数は最大で **7 個**である．1 の個数が 8 個のとき，2 つの列が等しくなってしまう．

10 $A = \begin{bmatrix} 3 & \mathbf{9} \\ 5 & 15 \end{bmatrix}$ のランクは 1 である．線形独立な列が 1 個．線形独立な行も 1 個．

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 4 & 8 & \mathbf{-20} \end{bmatrix}$ のランクは 1 である．$\mathbb{R}^2$ において線形独立な列が 1 個．$\mathbb{R}^3$ において線形独立な行が 1 個．

11 (a) A にゼロ列を追加したものが B であるとき，A と B の列空間は**等しい**．行の長さが異なるので，A と B の行空間は異なる．

(b) 追加された B の第 3 列が $(1, 1, 1, 1, 1)$ のとき，B の列空間が A の列空間と等しいかは，$(1, 1, 1, 1, 1)$ が $\mathbf{C}(A)$ に含まれているかに依存する．

(c) (第 3 列) = (第 2 列) − (第 1 列) のとき，A と B の列空間は等しい．

12 $\boldsymbol{b}$ が A の列空間に含まれるとき，$\boldsymbol{b}$ は A の列の線形結合であり，**その線形結合の係数が** $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ **の解** $\boldsymbol{x}$ **を与える**．例に対する解は，それぞれ $(x_1, x_2) = (1, 1)$，$(1, -1)$，$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ である．

13 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ と $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ とすると，$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ は A や B と同じ列空間を持つ（列空間が小さくなるような例もある．例えば，$B = -A$ のとき，$A + B$ はゼロ行列となる）．

14 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 9 \\ 5 & 0 & \mathbf{10} \end{bmatrix}$ のとき，(第 3 列) = 2(第 1 列) + 3(第 2 列) である．

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & \mathbf{9} \end{bmatrix}$ のとき，(第 3 列) = −1(第 1 列) + 2(第 2 列) である．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{q} \end{bmatrix}$$ は，$q \neq 0$ のとき線形独立な列が 2 個となる．

15 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ のとき，拡大行列 $\begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}$ で追加された列 $\boldsymbol{b}$ はそれより左の列の線形結合であり，$\boldsymbol{b}$ を追加することで列空間とランクは変化しない．

16 (a) **偽**．$B = -A$ のとき，$A + B$ のランクは 0 となる．

(b) **真**．A の n 個の列が線形独立であるとき，それらベクトルは $m < n$ である空間 $\mathbb{R}^m$ には入らない．したがって，$m \geq n$ である．

(c) **真**．行列の大きさが $m = n$（または $m \geq n$）のとき，ランダムな成分からなる行列の列は，ほぼ確実に線形独立である．

17 **ランク 2**: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，**ランク 1**: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，**ランク 0**: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

18 $$3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix} = S\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ であり，$S\boldsymbol{x}$ における 3 つの内積は $3, 7, 12$ である．

19 $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ において，$\boldsymbol{b} =$ (第 1 列) より $y_1 = 1, y_2 = 0, y_3 = 0$ となる．

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{bmatrix}$$ を解くと $$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$ となる．最初の 3 個の奇数が並ぶ．

最初の 3 個の奇数の和は $3^2 = 9$ である．最初の 10 個の奇数の和は $10^2 = 100$ である．

20 $$S\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$ の解は $$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 - c_1 \\ c_3 - c_2 \end{bmatrix}$$ である．この解は $\boldsymbol{y} = S^{-1}\boldsymbol{c} =$ $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$ とも書ける．S は線形独立な列からなる正方行列である．したがって S には，$SS^{-1} = S^{-1}S = I$ を満たす逆行列 S^{-1} がある．

21 3 本の等式を単純化して $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を解く（このことは第 2 章で扱う）．

$$
A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\quad \begin{array}{r} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3=0 \\ 4x_1+7x_2+9x_3=0 \end{array} \text{ から始めて } \begin{array}{c} (\text{第 2 行})-3(\text{第 1 行}) \\ (\text{第 3 行})-4(\text{第 1 行}) \end{array} \text{ を計算して } \begin{array}{r} x_1+2x_2+3x_3=0 \\ -x_2-3x_3=0 \\ -x_2-3x_3=0 \end{array}
$$

を得る．$x_3=1$ とすると $x_2=-3$ と $x_1=3$ となる．任意の c に対し，$\boldsymbol{x}=(3c,-3c,c)$ はすべて正しい解である．

22 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & \mathbf{3} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{-1} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 \\ 4 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} \mathbf{-2} & 1 \\ 4 & \mathbf{-2} \end{bmatrix}$ これら行列の列は線形従属である

23 式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ は，$\boldsymbol{x}$ が A の各行に直交することを示す（3 つの内積がゼロである）．このとき，$\boldsymbol{x}$ は A の行の線形結合のすべてに直交する．言い換えると，$\boldsymbol{x}$ は A の行空間（ここでは平面）に直交する．

次に示すことは，線形代数における重要な事実だ．A の零空間に含まれる（すなわち，$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ を満たす）すべてのベクトル $\boldsymbol{x}$ は，行空間に含まれるすべてのベクトルに直交する．

練習問題 1.4（40 ページ）

1 以下は，AB の 4 つの方法と計算回数についてである．A の形は $m\times n$，B は $n\times p$ とする．

（A の第 i 行）$\cdot$（B の第 k 列）	mp 個の内積，それぞれ n 回の掛け算．
A（B の第 j 列）	p 本の列，それぞれ mn 回の掛け算．
（A の第 i 行）B	m 本の行，それぞれ np 回の掛け算．
（A の第 j 列）（B の第 j 行）	n 個の行列（列 $\times$ 行），それぞれ mp 回の掛け算．

2 $A=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \end{bmatrix}$ は $CR=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ と分解される．

3

$$
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 32 \end{bmatrix},
$$

$$
\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix}.
$$

4 (a)

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}
$$

(b)

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

5 A は 7 列，4 行であり，各列は，4 次元空間内にある．4 次元空間には 5 本以上の線形独立なベクトルをとることができないので，線形独立な列数は，4 以内である（これは，問題の文章を再度書き直しただけで，実際の証明は，3.2 節 にある．すなわち，$m < n$ のとき，どんな $m \times n$ の行列 C についても，連立一次方程式 $C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ には $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 以外の解が存在する．ここでは，$m = 4$，$n = 7$ であり，C の 5 本以上の列は線形独立にはなりえない）．

6 $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7 $CR = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$ （問題 6 の A）

8 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = AI$ （$A = C$ であり $R = I$ である）

$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = CR$

9 ランダムな 4×4 行列は，線形独立な列（その場合，$C = A, R = I$）を確率 1 で持つ．($A = \mathbf{rand}(4,4)$ とすると，16 個の成分が 0 以上 1 未満の値を持つ一様分布で選ばれる．また，$A = \mathbf{randn}(4,4)$ とすると，この 16 個の成分を「釣り鐘型」の正規分布で選ぶこともできる．有限個の数から 16 個の成分を選ぶのなら，A の列が**線形従属**になる確率はゼロではない．実際，16 個の数字がすべて同じである確率もゼロではない）．

10 A をランダムな 4×5 の行列とすると，（上記のように **rand** または **randn** を使って）確率 1 で最初の 4 列は線形独立となり，C に入ることになる．最初の 4 列は確率 0 で（起こらないという意味ではない！）線形従属となり，C は異なるものになる（C は r 列を持ち、$r \leq 4$ となる）．

11 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & b & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & c \\ 0 & 1 & b & d \end{bmatrix} = CR$．その他，多くの可能性がある！

12 $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$A_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 1.5 \end{bmatrix} \qquad A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

13 $C=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$，$R=\begin{bmatrix}2&4\end{bmatrix}$ のとき $CR=\begin{bmatrix}2&4\\6&12\end{bmatrix}$，$RC=\begin{bmatrix}14\end{bmatrix}$ となる．そして，$CRC=\begin{bmatrix}14\\42\end{bmatrix}$，$RCR=\begin{bmatrix}28&56\end{bmatrix}$ となる. 興味深い事実として，A が $m\times n$，B が $n\times m$ のとき，AB の m 個の対角成分の和と，BA の n 個の対角成分の和は等しい．例：

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0&3\\1&4\\2&5\end{bmatrix}\quad AB=\begin{bmatrix}8&26\\17&62\end{bmatrix}\quad BA=\begin{bmatrix}12&15&18\\17&22&27\\22&29&36\end{bmatrix}$$

$8+62=12+22+36$

14 $\begin{bmatrix}3&6\\5&10\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}6&-7\\7&6\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}2&0\\3&6\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}3&4\\-2&-3\end{bmatrix}$

ランク 1　直交する列　ランク 2　$A^2=I$

15
1. A の第 j 例は，C と R の第 j 列の積．これは，C の 列の線形結合である．
2. A の第 i 行は，C の第 i 行と R の積．これは，R の 行 の設計結合である．
3. （C の第 i 行）・（R の第 j 列）の積により，A_{ij} が作られる．ドット積が定義できるためには，C の列数と R の行数が一致している必要がある．
4. C の列数は r なので，R の行数は r である（CR が成り立つ）．ここで C の列は線形独立である（そうなるように作成した）．また，R の行は線形独立である（$r\times r$ の正方行列を中に含むことから）．

16 (a) 列ベクトル $AB\boldsymbol{x}$ は行列 A を列ベクトル $B\boldsymbol{x}$ に掛けたものである．すなわち，A の列の線形結合となっている．よって，$\mathbf{C}(AB)\subseteq\mathbf{C}(A)$.

(b) $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ のとき $AB=O$（ゼロ行列）となり，$\mathbf{C}(AB)$ はゼロベクトルのみなる．

17 偽．(a) A と B がランク 1 行列のとき，AB のランクは 1 もしくは 0 である．$A=\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}},B=\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$ より，$AB=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}$．よって，内積 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ が 0 となる場合 $AB=O$（ゼロ行列）となる．そうでない場合，AB のランクは 1 である．

(b) A,B はともにランク 3 の 3×3 行列である．この場合,「AB のランクは 3 である」は **真** である．**これを示す一つのアプローチ**：A の 3 つの列は線形独立なので，$AB\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ であれば $B\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ である．さらに，B の 3 つの列は線形独立なので，$B\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ となるのは，$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ である場合に限られる．

(c) **真**．すべての 2×2 行列 B について，$AB=BA$ が成り立つとする．$B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ を選ぶと，

$AB=\begin{bmatrix}c&d\\e&f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c&d\\e&f\end{bmatrix}$ となる．この式より，$\begin{bmatrix}c&0\\e&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c&d\\0&0\end{bmatrix}$ が得られ，

ここから，$d = e = 0$ が導かれる．今度は，$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ を選ぶと，$AB = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & f \end{bmatrix}$．となり，ここから，$\begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ すなわち，$c = f$ が得られ，$A = cI$ が導かれる．

18 (a) $AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，$BC = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $(AB)C$ は $AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ を列交換したものになる．

$A(BC)$ は $BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ を行交換したものとなり，どちらも同じ結果（ABC）となる．

19 $$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

20 $AB = (4\times 3)\,(3\times 2)$ には $mnp = 4\times 3\times 2 = 24$ 回の掛け算が必要．そして，$(AB)C = (4\times 2)\,(2\times 1)$ には $4\times 2\times 1 = 8$ 回がさらに必要．合計で 32 回の掛け算.

$BC = (3\times 2)\,(2\times 1)$ には $mnp = 3\times 2\times 1 = 6$ 回の掛け算が必要．そして，$A(BC) = (4\times 3)\,(3\times 1)$ には $4\times 3\times 1 = 12$ 回がさらに必要．合計で 18 回の掛け算.

C が列ベクトルの場合を考えるとよく分かる．B を掛けた結果 BC は列ベクトルであり，最終的な結果 $A(BC)$ も列ベクトルとなる．ベクトルは行列よりも計算時間が少なくて済む！

練習問題 2.1（53 ページ）

1 式 1 の $\ell_{21} = \frac{10}{2} = \mathbf{5}$ 倍を式 2 から引くことによって，$2x + 3y = 1$（式 1 変化なし）と $-6y = 6$（新しい式 2）を得る．丸で囲むピボットは，2 と -6 である．後退代入によって，$-6y = 6$ から $y = -1$ を得，次に $2x + 3y = 1$ から $x = 2$ を得る．

2 (a)「行に基づく絵」の中の直線，(b)「列に基づく絵」の中のベクトル，および (c) 係数行列，は変化する．しかし，(d) 解，は変化しない．

3 式 1 の $-\frac{1}{2}$ 倍を引く．(または，$\frac{1}{2}$ 倍を足す)．その結果，式 2 は $\mathbf{3y=3}$ となる．そこから，$y=1$ と $x=5$ が得られる．右辺の符号を正負逆転した場合，解の符号も正負逆転し，$(x,y)=(-5,-1)$ となる．

4 式 1 の $\ell = \frac{c}{a}$ 倍を式 2 から引く．新しく現れた 2 番目のピボット（式 2 の y の係数）は，$d - (cb/a)$ すなわち $(ad - bc)/a$ である．ここから，$y = (ag - cf)/(ad - bc)$ が得られる．A の行列式が $ad - bc$ であることに注目．y を求める割り算が成功するためには，この行列式の値が非ゼロであることが必要．

5 $6x + 4y$ は $3x + 2y$ の 2 倍になってる．したがって，右辺が $2 \cdot 10 = 20$ でない限り，解なし．この場合，直線 $3x + 2y = 10$ 上の点全体が解となる．その直線上には，例えば $(0, 5)$ と $(4, -1)$ が含まれる（2 つの具体的な解）．式 1 と式 2 の直線はぴったり重なり，すべての解を含む．

6 特異になるのは $b = 4$ の場合．$4x + 8y$ が $2x + 4y$ の 2 倍となる．この場合，$g = 32$ とすれば 2 本の直線 $2x + 4y = 16$ と $4x + 8y = 32$ が **同じ** になり，無数の解を持つ．例えば，$(8, 0)$ と $(0, 4)$ が具体的な解の例である．

7 $a = 2$ の場合，前進消去は失敗する（行に基づく絵で，2 本の直線が平行となる）．この連立一次方程式には解がない．$a = 0$ の場合，前進消去は一時的に行き詰まるが，行交換を行えば継続できる．そして，$3y = -3$ から $y = -1$ を得，$4x + 6y = 6$ から $x = 3$ を得る．

8 $k = 3$ のとき，前進消去は失敗する．解はない（平行な 2 本の直線）．$k = -3$ のとき，式 2 が $0 = 0$ となり，無数の解が存在する（ぴったり重なる 2 本の直線）．$k = 0$ のとき，行交換が必要．唯一解が求まる（一点で交わる 2 本の直線）．

9 左辺を観察すると，$6x - 4y$ は $3x - 2y$ の 2 倍になっている．よって，解を持つためには，右辺が $b_2 = 2b_1$ となる必要があり，その場合無数の解を持つ（行に基づく絵では 2 本の平行線がぴったり重なる）．列に基づく絵では，2 本の列ベクトルが同一直線上となり，その直線上に (b_1, b_2) が存在する場合にのみ解が存在する．

10 直線を示す式 $y = 1$ が前進消去（$x + 2y = 6$ から $x + y = 5$ を引く）によって得られる．その結果，$x = 4$ が得られ，$5x - 4y = 20 - 4 = c = 16$ となる．

11 (a) $\frac{1}{2}(x + X, y + Y, z + Z)$ とすれば，もう一つ解が得られる． (b) 25 枚の平面が 2 点で交わるなら，その 2 点を通る直線で全平面が交わることになる（その直線上の点はすべて解となる）．

12 前進消去の結果，上三角の連立方程式（上三角の係数行列）が得られる．そして，後退代入で解を得る．

$$\begin{aligned} 2x+3y+\ \ z&=8 \\ y+3z&=4 \\ 8z&=8 \end{aligned} \quad\rightarrow\quad \begin{aligned} x&=2 \\ y&=1 \\ z&=1 \end{aligned}$$

ゼロが第 2 行や第 3 行のピボット位置に現れると，行の操作が中断される．

$$\begin{aligned} 2x-3y\qquad&=3 \\ 4x-5y+\ \ z&=7 \\ 2x-\ \ y-3z&=5 \end{aligned} \quad\rightarrow\quad \begin{aligned} 2x-3y&=3 \\ y+\ \ z&=1 \\ 2y+3z&=2 \end{aligned} \quad\rightarrow\quad \begin{aligned} 2x-3y&=3 \\ y+\ \ z&=1 \\ -5z&=0 \end{aligned} \quad\rightarrow\quad \begin{aligned} x&=3 \\ y&=1 \\ z&=0 \end{aligned}$$

13 第 1 行の 2 倍を第 2 行から引くと，$(d-10)y-z=2$ となり，第 3 行は $y-z=3$ のままである．$d=\mathbf{10}$ の場合，第 2 行と第 3 行 を交換して前進消去を進めることができる．$d=\mathbf{11}$ の場合，この連立方程式は特異である（解を持たない）．

14 2 番目のピボット位置に，$-2-b$ が現れる．もし，$b=-2$ であれば，この行を第 3 行と交換する．$b=-1$（特異の場合）であれば，式 (2) は $-y-z=0$ となるが，式 (3) と同一式になり，**解は原点を通る直線**（$(x,y,z)=(1,1,-1)$ を通る）となる．

15 (a) **2 回の行交換が必要な例**

$$\begin{aligned} 0x+0y+2z&=4 \\ x+2y+2z&=5 \\ 0x+3y+4z&=6 \end{aligned}$$

（まず第 1 行と第 2 行を交換し，次に第 2 行と第 3 行を交換）

(b) **交換するがその後に破綻する**

$$\begin{aligned} 0x+3y+4z&=4 \\ x+2y+2z&=5 \\ 0x+3y+4z&=6 \end{aligned}$$

（第 1 行と第 3 行が矛盾する）

16 第 1 行と第 2 行が等しい場合，第 2 行は最初のステップでゼロになる．そのゼロ行を第 3 行と交換するが，新しい第 3 行にはピボットがない．第 2 列がが第 1 列と等しい場合，第 2 列にはピボットがない．

17 例 $x+2y+3z=0, 4x+8y+12z=0, 5x+10y+15z=0$ には 9 個の異なる係数があるが，第 2 行と第 3 行は，前進消去の結果 $0=0$ となる．この場合，$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ は無数の解を持つが，適当にとった右辺の $\boldsymbol{b}$ に関して，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は解を持たない．

18 第 2 行は $3y-4z=5$ となり，第 3 行は $(q+4)z=t-5$ となる．$q=-4$ のとき，この連立一次方程式は特異である（3 番目のピボットが見つからない）．その場合，$t=5$ であれば式 3 は $0=0$ となり，無数の解が存在する．例えば $z=1$ を選べば，式 2 は $3y-4z=5$ となり，$y=3$ を得，さらに式 1 から $x=-9$ を得る．

19 $\begin{bmatrix} a & 2 \\ a & a \end{bmatrix}$ の前進消去が失敗するのは $a=\mathbf{2}$ もしくは $a=\mathbf{0}$ の場合（行列式 a^2-2a が $a=2$ と $a=0$ でゼロになるのに気づくだろう）．

20 $a=2$ のとき等しい列が現れ，$a=4$ のとき等しい行が現れる．さらに，$a=0$ のときゼロ列が現れる．

21 $s=10$ のとき解が存在する．これを見つけるためには，左右 2 つの式のペアを足して $a+b+c+d$ を求める．左の 2 つの式のペアから 12 が得られ，右の 2 つの式のペアから $2+s$ が得られる．よって，$2+s$ が 12 になるには，$s=10$ である．a,b,c,d に関する 4 本の式は**特異**である！2 つの解の例は，$\begin{bmatrix}1&3\\1&7\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}0&4\\2&6\end{bmatrix}$ であり，$A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\\0&1&0&1\end{bmatrix}$ $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}4\\2\\8\\s\end{bmatrix}$ $U=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\end{bmatrix}$

22 MATLAB では，コマンド $A(2,:)=A(2,:)-3*A(1,:)$ によって，第 1 行の全要素の 3 倍を第 2 行の全成分から引き算する．

23 ある実験では，**rand**(3) によって生成された行列の**行交換なし**の場合の第 2，第 3 ピボット平均値は，それぞれ $\frac{12}{5}, 10$ だった．しかし，第 2，第 3 ピボットは任意に大きくなることができる．その平均値は，実は無限大である！MATLAB の **lu** コマンド（**行交換あり**）のコードでは，平均値は .75 と .50 と .365 というように，はるかに安定している．(A の成分の確率分布が，一様分布（**rand**）でなく正規分布（**randn**）の場合でも安定していて予測可能である）．

24 $A(5,5)$ は 11 でなく 7．その場合に，最後のピボットは 4 でなく 0 になる．

25 U の j 行は A の $1,\ldots,j$ 行の組み合わせである（行交換がない場合）．$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ ならば $U\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ である．しかし，右辺が $\mathbf{0}$ でなく $\boldsymbol{b}$ の場合は成り立たない（$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ ならば $U\boldsymbol{x}=E\boldsymbol{b}=L^{-1}\boldsymbol{b}$）．$A$ が**下三角行列**の場合には，U は A の対角成分のみからなる対角行列となる（対角成分以外の成分はすべて 0）．

26 この問題は，100 本の方程式と 100 の変数からなる特異な連立一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ に関するものである．A は非可逆である．

(a) 100 本の**列**のある線形結合によって，**ゼロ列**が得られる．

(b) 非常に特異な行列として，すべての成分が 1 である行列 $A=$ **ones**(100) がある（**ones** は MATLAB，その他言語ですべて 1 の成分を持つ行列を作るコマンド）．よりよい例は，99 本のランダムな行（または，第 i 行に $1^i,\ldots,100^i$ のような数を入れる）を作り，第 100 行に，最初の 99 行の和（またはその他の行の線形結合のうち，ゼロ成分を持たないもの）を入れた行列．

(c) 「行に基づく絵」では，100 枚の平面が**原点を通る 1 本の直線で交わる**.「列に基づく絵」では，100 本のベクトルが，99 次元の同一の超平面上にある．

練習問題 **2.2**（**63** ページ）

1 $E_{21}=\begin{bmatrix}1&0&0\\\mathbf{-5}&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $E_{32}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\mathbf{7}&1\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\mathbf{1}&0\\0&0&\mathbf{1}\\\mathbf{1}&0&0\end{bmatrix}$

2 $E_{32}E_{21}\boldsymbol{b} = (1, -5, -35)$ であるが，$E_{21}E_{32}\boldsymbol{b} = (1, -5, 0)$ である．E_{32} を先に適用した場合，第 3 行は第 1 行の影響を受けない．

3 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow E_{21}, E_{31}E_{32} \quad E = E_{32}E_{31}E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-4} & 1 & 0 \\ \mathbf{10} & \mathbf{-2} & 1 \end{bmatrix}$

これらの E は $EA = U$ を作り出す正しい順序である．

$$E^{-1} = E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1} = L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{4} & 1 & 0 \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} & 1 \end{bmatrix}$$

4 第 4 列は前進消去の過程で以下のように変化する：$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{E_{21}}{\to} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{E_{31}}{\to} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} \overset{E_{32}}{\to} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 10 \end{bmatrix}$

オリジナルの $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = (1, 0, 0)$ は $U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} = (\mathbf{1}, \mathbf{-4}, \mathbf{10})$ に変化する．さらに，後退代入によって $\boldsymbol{z} = \mathbf{-5}, y = \mathbf{\frac{1}{2}}, x = \mathbf{\frac{1}{2}}$ が得られる．これは $A\boldsymbol{x} = (1, 0, 0)$ を満たす．

5 a_{33} を 7 から 11 に変えると，第 3 ピボットは 5 から 9 に変わる．a_{33} を 7 から 2 に変えると，第 3 ピボットは 5 から **ピボットなし** に変わる．

6 例：$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 7 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$．すべての列が第 1 列の倍数の場合，第 2 ピボットは存在しない．

7 E_{31} の逆行列は，第 3 行に第 **1** 行の 7 倍を**加えた**ものである．消去行列の逆行列は，

$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{-7} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ is $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{7} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ であり，$EE^{-1} = I$ を計算すれば，積が単位行列となることが確認できる．

7-1 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \qquad M^* = \begin{bmatrix} a & b \\ c - \ell a & d - \ell b \end{bmatrix}$

$\det M^* = a(d - \ell b) - b(c - \ell a)$ が $ad - bc$ となる！第 1 行を第 2 行から引いても，$\det M$ は変化しない．

8 $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (a),(b) どちらも同じ．
交換後の新しい第 3 行（もともとは第 2 行だった）に対して
E_{31} （E_{21} ではない）を作用させるから．

9　同時の場合は $\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ であり，順次の場合は $E_{31}E_{13} = \begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ となる．単位行列に対する操作を例にしてテストしてみるとよい．

10　ピボットが負になる例は，$A = \begin{bmatrix}1&2&2\\1&1&2\\1&2&1\end{bmatrix}$．対角成分の正負は，前進消去の過程で変化する可能性がある．

11　最初の P は，単純な第 1 行と第 3 行の交換なので $P^2 = I$ となる．よって，$P^{-1} = P$．次の P は，$P^{-1} = \begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ となる．置換行列 P の逆行列は常に転置行列である（$P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$，2.4 節，76 ページ）．

12　$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}.5\\-.2\end{bmatrix}$，　$\begin{bmatrix}t\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-.2\\.1\end{bmatrix}$ よって，$A^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{bmatrix}5&-2\\-2&1\end{bmatrix}$ となる．この問題では，$AA^{-1} = I$ を列ごとに解いたことになる．これは，ガウス・ジョルダン法の基本的考え方と同じである．

13　上三角行列 U で $U^2 = I$ を満たす例として，$U = \begin{bmatrix}1&a\\0&-1\end{bmatrix}$ がある（a はどんな数でもよい）．また，$-U$ も同じく上三角行列であり，$U^2 = I$ を満たす．

14　(a) $AB = AC$ の両辺に A^{-1} を掛けることで，$B = C$ を得る（A が可逆行列であることを利用）．

(b) $A = \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ に対して，$B - C$ が $\begin{bmatrix}x&y\\-x&-y\end{bmatrix}$ の形の場合に $AB = AC$ が成り立つ．

15　(a) 例えば $A\boldsymbol{x} = (0,0,1)$ の場合を考えよ．式 1 と式 2 の和から式 3 を引くと $0 = 1$ となることから，非可逆．

(b) 右辺が $b_1 + b_2 = b_3$ を満たす必要がある．

(c) 前進消去の過程で，第 3 行がゼロ行になる．すなわち，3 番目のピボットが存在しない．

16　(a) 非ゼロの列ベクトル $\boldsymbol{x} = (1,1,-1)$ は $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解である．

(b) 前進消去の過程で，第 1 列と第 2 列の最終行は 0 になる．そのとき，第 3 列の最終行も 0 になってしまう（第 3 列 = 第 1 列 + 第 2 列なので）．つまり，3 番目のピボットが存在しない．

17　答えはイエス．B は可逆である（B は A に置換行列 P を掛けるだけで得られる）．A の第 1 行と第 2 行を入れ替えることで B に到達したとする．このとき，A^{-1} の第 1 **列**と第 2 **列**を入れ替えることで B^{-1} に到達することができる．行列を使って表現すれば，この議論の前半は $B = PA$ であり，後半は同じ P を使って $B^{-1} = A^{-1}P^{-1} = A^{-1}P$ である．

18　(a) $B = -A$ の場合，A, B が可逆であっても，$A + B$ はゼロ行列となり非可逆である．

(b) $A = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$，　$B = \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ とすれば，A, B はともに非可逆であるが，$A + B = I$ は可逆である．

19 $C = AB$ の両辺に左から A^{-1} を掛け，右から C^{-1} を掛けることで，$\boldsymbol{A^{-1} = BC^{-1}}$ を得る．

20 $M^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ となるから，この両辺に左から C を掛け，右から A を掛けることで，$\boldsymbol{B^{-1} = CM^{-1}A}$ を得る．

21 $B^{-1} = A^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1} = A^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ である．すなわち，A^{-1} の第 2 列を第 1 列から引いたものが B^{-1} である．

22 A がゼロ列が存在するとき，BA にもゼロ列が存在する（BA の各列は B の列の線形結合だが，うち 1 列が A のゼロ列を線形結合の係数とするため，ゼロになる）．よって，$BA = I$ には決してならない．すなわち，A^{-1} は存在しない．

23 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ad-bc & 0\\ 0 & ad-bc\end{bmatrix}$ それぞれの逆行列はお互い他方を $ad - bc$ で割ったもの．

24 $E_{32}E_{31}E_{21} = \begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ -1 & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ -1 & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & & \\ -1 & 1 & \\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix} = E$．順序を逆にし，各変換行列 E_{ij} の -1 成分を $+1$ に変えて掛け算すると，逆行列を得る．$E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}E_{32}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix} = L = E^{-1}$．対角以外の位置にある成分 1 は，逆行列を掛け算することで変化しない．

25 $A^2B = I$ を $A(AB) = I$ と書くことができる．すなわち，$A^{-1} = AB$ である．

26 $A * \text{ones}(4,1) = \begin{bmatrix}4 & 4 & 4 & 4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} - \begin{bmatrix}4 & 4 & 4 & 4\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ なので，A は逆行列を持たない．

27 16 個の $0-1$ 行列のうち，6 個が可逆である（I と P と，1 が 3 個ある行列の 4 個）．

28 $\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 7 & 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 7 & -3\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I & A^{-1}\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 3 & 9 & 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -3 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & -3 & 4/3\\ 0 & 1 & 1 & -1/3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I & A^{-1}\end{bmatrix}$

29 A は対角成分にゼロを並べて可逆にできる（例を見つけよ）．B は各行の和がゼロであるので非可逆である．すなわち，すべての成分が 1 のベクトル $\boldsymbol{x} = (1,1,1,1)$ について $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となってしまう．

30 $A^{-1} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 3 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{bmatrix}$ である．$B\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ なので，B^{-1} は存在しない．

31 $\begin{bmatrix}U & I\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & a & b & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & a & 0 & 1 & 0 & -b\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & -a & ac-b\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I & U^{-1}\end{bmatrix}$

32 (a) **真**．A がゼロ行を持つとすれば，AB もゼロ行を持ち，$AB = I$ となる B は存在しない．(b) **偽**．すべての成分が 1 である行列は（対角成分がすべて 1 であっても）逆行列を持たない．(c) **真**．A^{-1} の逆行列は A であり，A^2 の逆行列は $(A^{-1})^2$ である．

33 前進消去によってピボット a と $a-b$ と $a-b$ が現れる．$A^{-1} = \dfrac{1}{a(a-b)} \begin{bmatrix} a & 0 & -b \\ -a & a & 0 \\ 0 & -a & a \end{bmatrix}$

$c = 0$ あるいは $c = 7$ あるいは $c = 2$ の場合，行列 C は非可逆である．

34 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = A^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ この問題の A のように，三角行列の対角要素に 1，その上の第 2 対角要素に -1，というように交互に 1 と -1 の成分が並ぶ「交互行列」の逆行列 A^{-1} は，対角要素とその上の第 2 対角要素のみに 1 を持つ行列になる．

35 $\boldsymbol{x} = (1, 1, \dots, 1)$ とすると，$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{x}$ なので，$(P - Q)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ である．どんな置換によっても，成分がすべて 1 であるベクトルは変化しない．よって，$P - Q$ は非可逆である．

36 それぞれのブロック行列の逆行列は，$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -C & I \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} -D & I \\ I & 0 \end{bmatrix}$ である．

37 A は（行交換を許した）前進消去の過程で 3 つの非ゼロのピボットが現れるとき，可逆である．

練習問題 2.3（72 ページ）

1 第 1 行の $\ell_{21} = \mathbf{1}$ 倍を第 2 行から引き算する．**逆のステップでは** $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ となる．この L を $U\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{c}$ に左から掛けると，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ となる．文字で表現すれば，$\boldsymbol{L}$ **を** $\boldsymbol{Ux = c}$ **に掛けると** $\boldsymbol{Ax = b}$ **となる．**

2 $L\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$ は $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ であり，前進消去によって解は $\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$ である．

$U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ は $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ であり，後退代入によって解は $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$ である．

3 $EA = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{4} & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix} = U$

E^{-1} が L であり，$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix}1&&\\0&1&\\0&-2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\-2&1&\\0&0&1\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&3\\0&0&-6\end{bmatrix}=U$ より，$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}U$ という式は $E_{21}^{-1}E_{32}^{-1}U=LU$ と同じ．乗数 $\ell_{21}=\ell_{32}=2$ が L の正しい位置に配置される．

5 $E_{32}E_{31}E_{21}\ A\ =\ \begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&\mathbf{-2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\\mathbf{-3}&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\\mathbf{-2}&1&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&2\\3&4&5\end{bmatrix}$ である．この計算結果が，

$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=U$ である．使った乗数 $2,3,2$ を L に配置すると，$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\\mathbf{2}&1&0\\\mathbf{3}&\mathbf{2}&1\end{bmatrix}U=\ LU$

6 $A=\begin{bmatrix}2&4\\4&11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&0\\\mathbf{2}&\mathbf{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{2}\\0&\mathbf{1}\end{bmatrix}=LDU$ である．ここで，$\boldsymbol{U}$ は $\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$ である．

$\begin{bmatrix}1&&\\4&1&\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&0\\0&-4&4\\0&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}&&\\\mathbf{4}&\mathbf{1}&\\0&\mathbf{-1}&\mathbf{1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&-4&\\&&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{4}&0\\0&\mathbf{1}&\mathbf{-1}\\0&0&\mathbf{1}\end{bmatrix}=LDL^{\mathrm{T}}$

7 $\begin{bmatrix}a&a&a&a\\a&b&b&b\\a&b&c&c\\a&b&c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\1&1&&\\1&1&1&\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&a&a&a\\&b-a&b-a&b-a\\&&c-b&c-b\\&&&d-c\end{bmatrix}$ 条件式は，

$a\neq 0$ すべての
$b\neq a$ 乗数
$c\neq b$ は $\ell_{ij}=1$
$d\neq c$ である A

8 問題 8 の L は問題 7 の L と同じ．

$\begin{bmatrix}a&r&r&r\\a&b&s&s\\a&b&c&t\\a&b&c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&&\\1&1&&\\1&1&1&\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a&r&r&r\\&b-r&s-r&s-r\\&&c-s&t-s\\&&&d-t\end{bmatrix}$ 条件式は

$a\neq 0$
$b\neq r$
$c\neq s$
$d\neq t$

9 $\begin{bmatrix}1&0\\4&1\end{bmatrix}\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}2\\11\end{bmatrix}$ 前進消去で $\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$．さらに，$\begin{bmatrix}2&4\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ 後退代入で $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-5\\3\end{bmatrix}$．

$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は $LU\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2&4\\8&17\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2\\11\end{bmatrix}$．前進消去によって $\begin{bmatrix}2&4\\0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\boldsymbol{c}$ となる．

10 $\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}4\\1\\1\end{bmatrix}$ さらに，$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}4\\1\\1\end{bmatrix}$ より $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$ となる．これらは

$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ として，$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}$ に対する前進消去と後退代入である．

11 (a)L は I になる． (b)I は L^{-1} になる． (c)LU は U になる．どの問でも **消去行列** E **が** $\boldsymbol{L^{-1}}$ であることに注意.

12 (a) $LDU = L_1D_1U_1$ に L と U の逆行列を掛けると，$L_1^{-1}LD = D_1U_1U^{-1}$．左辺は下三角行列で，右辺は上三角行列．⇒ 両辺が対角行列.

(b) L, U, L_1, U_1 は対角成分がすべて 1 の行列なので，$D = D_1$．よって，$L_1^{-1}L$ と U_1U^{-1} はともに I である．

13 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} = LIU$ であり，$\begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & a+b & b \\ 0 & b & b+c \end{bmatrix} = L\begin{bmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{bmatrix}U$ である．

3 重対角行列 A は **2 重対角行列の積** L と U に分解される．

14 最初の行列 A では，L は行の先頭の 3 つのゼロ（$A_{21}, A_{31}, A32$）をそのまま保持する．しかし，U は上部左 $A_{24} = 0$ のゼロを保持しない（かもしれない）．2 番目の行列 B では，L は左下の第 4 行先頭のゼロ（A_{41}）をそのまま保持する．U は列の上部右の第 4 列先頭のゼロ（A_{14}）をそのまま保持する．**その他，$\boldsymbol{A}$ の 1 つのゼロと $\boldsymbol{B}$ の 2 つのゼロは他の数で埋まる．**

15 2 行 2 列の上部の部分行列 A_2 は，A の最初の 2 つのピボット $5, 9$ を持つ．理由：A の前進消去は，左上の角から始まる．すなわち，A_2 の消去から始まる．

16 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

17 $L^{\mathrm{T}}L = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ および $LL^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

練習問題 2.4（83 ページ）

1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$ において，$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1/3 \end{bmatrix}, (A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$.

$A = \begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}$ において，$A^{\mathrm{T}} = A$ および $A^{-1} = \dfrac{1}{c^2}\begin{bmatrix} 0 & c \\ c & -1 \end{bmatrix} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

2 $(AB)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ であり，この答えは $A^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ とは異なる（ただし $AB = BA$ のときは一致する）．$AA^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ および $A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ であり，ともに対称行列である．

3 (a) $((AB)^{-1})^{\mathrm{T}} = (B^{-1}A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}(B^{-1})^{\mathrm{T}}$．これは，$(A^{\mathrm{T}})^{-1}(B^{\mathrm{T}})^{-1}$ とも一致する．

(b) U が上三角行列ならば，U^{-1} も上三角行列である．したがって，$(U^{-1})^{\mathrm{T}}$ は **下三角行列である．**

4 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$ は $A^2=0$ となる例である．しかし，$A^{\mathrm{T}}A$ の対角成分は A の列ベクトル**それぞれ自身との**内積である.「$A^{\mathrm{T}}A=0$」→「$A^{\mathrm{T}}A$ の対角成分がすべてゼロ」→「A の列の長さはすべてゼロ」→「列はすべてゼロベクトル」→「$A=0$」である．

5 (a) $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=5$

(b) 計算結果の 5 は，行 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ と列 $\boldsymbol{y}$ $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ の積である．

(c) さらに，行 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$ と $A\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$ の積とも一致する．

6 $M^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}} & C^{\mathrm{T}}\\B^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$ となり，$M^{\mathrm{T}}=M$ となるためには，$A^{\mathrm{T}}=A$ **かつ** $\boldsymbol{B^{\mathrm{T}}=C}$ **かつ** $D^{\mathrm{T}}=D$ となる必要がある．

7 (a) **偽**：$\begin{bmatrix}0 & A\\A & 0\end{bmatrix}$ は $A=A^{\mathrm{T}}$ の場合に限って対称行列になる．

(b) **偽**：AB の転置は $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=BA$ である．よって，A,B がともに対称であっても $(AB)^{\mathrm{T}}=AB$ が成り立つには $BA=AB$ となる必要がある．

(c) **真**：可逆な対称行列は，その逆行列も対称である．最も簡単な証明は，$AA^{-1}=I$ を転置することである．これから，対称でない可逆行列 A はその逆行列 A^{-1} も対称でない，と言える．

(d) **真**：$(ABC)^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ であり，A,B,C が対称行列なので $=CBA$ となる．

8 第 1 列の 1 の場所（1 つだけ）には n 個の選択肢があり，第 2 列の 1 は $n-1$ 個の選択肢があり，...全体で $n!$ 通りの選択肢がある．

9 異なる結果になる例：$P_1P_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ であるが，$P_2P_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ である．もし，P_3 と P_4 が交換するペアが**共通しない**ならば，$P_3P_4=P_4P_3$ は両方の交換を表す置換行列となる．

10 4 の位置を変えない偶置換は，$(3,1,2,4)$ と $(2,3,1,4)$ の 2 つのみ．同様に，$1,2,3$ それぞれどれか 1 つを固定した偶置換があと 6 個ある．
さらに，$(2,1,4,3)$ と $(3,4,1,2)$ と $(4,3,2,1)$ はそれぞれ 2 つのペアを交換する偶置換．それらに $(1,2,3,4)$ を加えると，全部で偶置換は 12 個となる．

11 「逆単位行列」とも言える置換行列 P は $(1,\ldots,n)$ を $(n,\ldots,1)$ に変換する．行と列それぞれを逆順にする PAP で $(A)_{11}$ と $(A)_{nn}$ が場所を交換する．同様に，$(A)_{1n}$ と $(A)_{n1}$ も場所を交換する．一般的に，書くと $(PAP)_{ij}=(A)_{n-i+1,n-j+1}$ となる．

12 $P^{\mathrm{T}}P=I$ より $(P\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(P\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}P\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ は正しいが，一般には，$P\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}\cdot P^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}\cdot P\boldsymbol{y}$ である．成り立つのは $P=P^{\mathrm{T}}$ の場合（対称行列）に限る．$P\neq P^{\mathrm{T}}$ の場合に成り立たない例を示す．

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

13 $PA=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&6\\1&2&3\\0&4&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{bmatrix}$ として上三角行列となる．A の右から置換行列 P_2 を掛けると，A の列が置換される．

元の A を下三角行列にするためには，第 2 行と第 3 行を交換する P_1 を左から掛け，第 1 列と第 3 列を交換する P_2 を右から掛ける必要がある．

$$P_1AP_2=\begin{bmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&0&0\\5&4&0\\3&2&1\end{bmatrix}$$

14 巡回置換 $P=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$ またはその転置行列によって，$P^3=I:(1,2,3)\to(2,3,1)\to(3,1,2)\to(1,2,3)$ となる．単純な行交換（互換）行列では必ず $P^2=I$ より $P^3=P$ であり，$P^3=I$ にはならない．同じ置換 P から作られる $\widehat{P}=\begin{bmatrix}1&0\\0&P\end{bmatrix}$ は 4 次の置換行列であり，$\widehat{P}^4=\widehat{P}\neq I$ となる．

15 (a) 互換行列 P が第 1 行を第 4 行に移動するとき，P^{T} は第 4 行を第 1 行に移動する． (b) $E=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ として，$P=\begin{bmatrix}E&0\\0&E\end{bmatrix}=P^{\mathrm{T}}$ は全ての行を移動させる．第 1 行と第 2 行が交換され，第 3 行と第 4 行が交換される．

16 A，B が対称行列であれば，A^2-B^2，ABA は対称行列である．しかし，$(A+B)(A-B)$，$ABAB$ は一般に対称行列ではない．これらは，それぞれ $(A-B)(A+B)$，$BABA$ を転置したものである．

17 (a) $S=S^{\mathrm{T}}$ の場合，$5+4+3+2+1=15$ 個の成分を独立に選べる．

(b) L に 10 個，D に 5 個の成分があるので，LDL^{T} には 15 個の成分がある．

(c) $A^{\mathrm{T}}=-A$ の場合，対角成分はゼロになる必要があり，$4+3+2+1=10$ 個の成分を選べる．

(d) $A^{\mathrm{T}}A$ の対角成分は，$||$ 第 1 行 $||^2$，$||$ 第 2 行 $||^2$，$\ldots\Rightarrow$ 対角成分は負にはならない．

18 $\begin{bmatrix}1&3\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\\mathbf{3}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\mathbf{3}\\0&1\end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix}1&b\\b&c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\\boldsymbol{b}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&c-b^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\boldsymbol{b}\\0&1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\-\mathbf{\frac{1}{2}}&1&\\\mathbf{0}&-\mathbf{\frac{2}{3}}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&&\\&\frac{3}{2}&\\&&\frac{4}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-\mathbf{\frac{1}{2}}&\mathbf{0}\\&1&-\mathbf{\frac{2}{3}}\\&&1\end{bmatrix}=\boldsymbol{LDL}^{\mathrm{T}}$$

19 $\begin{bmatrix}&1&\\1&&\\&&1\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\2&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\0&1&\\2&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\&1&1\\&&-1\end{bmatrix}$;

$$\begin{bmatrix}1&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}1&2&0\\1&1&1\\2&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&&\\1&1&\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&0\\&-1&1\\&&1\end{bmatrix}$$

20 $A=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}=P$ であり $L=U=I$ である．このの $A=P$ の前進消去の過程では，まず第 1-2 行を交換，次に第 2-3 行を交換，最後に第 3-4 行を交換する

21 置換の偶奇を判定する 1 つの方法は，置換 P によって「順序が逆転するペアの数」を数えることである．P がそのようなペアを偶数個を持つときは偶置換であり，奇数個持つときは奇置換である．難しいステップは,「互換」が常にその数を 1 つだけ変えることを示すことである！3 回または 5 回の互換でその数は奇数になり（それは奇置換である），偶置換である単位行列にはなれない．

22 $A=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&0\\2&3&0&1\\3&0&1&2\end{bmatrix}=A^{\mathrm{T}}$ はすべての行に $0,1,2,3$ がある対称行列である．ハンケル（Hankel）行列と呼ばれるこのような対称行列で，対角に同じ値が並ぶ行列を構成する一般的な規則を，私知らない．

23 どのように行や列の順番を変えても，$\left[\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right]$ の **a** 成分は移動してしまう．したがって，置換の結果は転置行列にならない（転置操作は **a** を移動させない）．

24 (a) 各都市から流れ出る合計電流は，$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&0\\0&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{BC}\\y_{CS}\\y_{BS}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_{BC}+y_{BS}\\-y_{BC}+y_{CS}\\-y_{CS}-y_{BS}\end{bmatrix}$ で計算できる．(b) どちらの計算方法でも，$(A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})=x_By_{BC}+x_By_{BS}-x_Cy_{BC}+x_Cy_{CS}-x_Sy_{CS}-x_Sy_{BS}$ となり，6 つの項からなる．

25 $P=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$ であり，$P^3=I$ となる．よって，P を 3 回掛けると 360° 回転してもとに戻る．つまり，P は $\boldsymbol{v}$ を $(1,1,1)$ 軸に沿って 120° 回転させる．

26 $L(U^{\mathrm{T}})^{-1}$ は，下三角行列と下三角行列の積であるから，下三角行列である．$U^{\mathrm{T}}DU$ の転置は $U^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}\,\mathrm{T}} = U^{\mathrm{T}}DU$ に戻るので，$U^{\mathrm{T}}DU$ は 対称行列である．この分解は，下三角行列（$L(U^{\mathrm{T}})^{-1}$）と対称行列（$U^{\mathrm{T}}DU$）の積である．積は LDU すなわち A となる．

27 以下が群となる：対角成分がすべて 1 の下三角行列 L，可逆な対角行列 D，置換行列 P，直交行列 Q （$Q^{\mathrm{T}} = Q^{-1}$）．対称行列，正定値行列は群ではないことに注意.

28 置換行列は全部で $n!$ 個（有限）ある．置換行列の積もまた置換行列であるから，P のべきの中には，必ず 2 つ同じものが存在する．それらを $P^r = P^s$ とすると $P^{r-s} = I$ であり $r - s \leq n!$ である．
$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ として，$P = \begin{bmatrix} P_2 & \\ & P_3 \end{bmatrix}$ は 5×5 行列であり，$\boldsymbol{P^6 = I}$ となる.

29 行列 M を対称行列 S と交代行列 A の和に分解するには，$S = \frac{1}{2}(M + M^{\mathrm{T}})$ と $A = \frac{1}{2}(M - M^{\mathrm{T}})$ が唯一の選択である.

30 $Q^{\mathrm{T}}Q = I$ から始める．これを Q の列を $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2$ として $\begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ と書ける.

(a) 対角成分より，$\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_1 = 1, \boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_2 = 1$ ： 単位ベクトル

(b) それ以外の成分 $\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_2 = 0$（一般的に $\boldsymbol{q}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_j = 0$）: 直交ベクトル

(c) この Q のよい例は，回転行列 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

練習問題 3.1 （93 ページ）

注 興味深い「マックス･プラス」ベクトル空間は，実数 $\mathbb{R}$ に $-\infty$ を追加して得られるものだ．ベクトルの和を $x+y = \max(x, y)$ とし，スカラー倍を $xy =$ (**通常の** $x+y$) とする．任意の x に対し，$x+\mathbf{0} = \max(x, \mathbf{0}) = x$ を満たすようなゼロベクトル $\boldsymbol{y}$ は何か？（訳注：このマックス演算とプラス演算からなる代数系は「トロピカル代数」とも呼ばれる．）

1 規則 (1), (2), (8) が成り立たない．すなわち，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) \neq (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}$，および，$(c_1+c_2)\boldsymbol{x} \neq c_1\boldsymbol{x}+c_2\boldsymbol{x}$.

2 $c(x_1, x_2) = (cx_1, 0)$ のとき，規則 (5) 「1 と $\boldsymbol{x}$ の積は $\boldsymbol{x}$ に等しい」のみ成り立たない．ベクトルの和を変更していないので，ベクトルの和に関する規則 (1)–(4) は依然として成り立つ．

3 (a) 集合に $c\boldsymbol{x}$ が含まれないかもしれない．すなわち，集合はスカラー倍に関して閉じていない．また，規則 (3) の $\mathbf{0}$ はなく，規則 (4) の $-\boldsymbol{x}$ もない．
(b) $c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})$ は通常の意味で $(xy)^c$ であり，$c\boldsymbol{x}+c\boldsymbol{y}$ は通常の意味で $(x^c)(y^c)$ であるので，これらは等しい．$c=3$，$x=2$，$y=1$ のとき，$3(2+1)=8$ である．ゼロベクトルは数 1 である．

4 行列空間 $\mathbf{M}$ におけるゼロベクトルは $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ である．$\frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$．$-A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$．$\mathbf{M}$ の部分空間のうち，行列 A を含む最小の部分空間は cA すべてからなる．

5 (a) 1 つの例．行列 cA すべてからなる集合は部分空間であるが，B を含まない．(b) 「イエス」．部分空間は必ず $A-B=I$ を含む．(c) 対角成分がすべてゼロの行列からなる部分空間．

6 $f(x)=x^2$ および $g(x)=5x$ のとき，関数空間において線形結合 $3f-4g$ は $h(x)=3f(x)-4g(x)=3x^2-20x$ となる．

7 規則 (8) が成り立たない．スカラー倍 $cf(x)$ が通常の意味で $f(cx)$ であるとき，一般に $(c_1+c_2)f(x) = f((c_1+c_2)x)$ と $c_1f(x)+c_2f(x) = f(c_1x)+f(c_2x)$ は等しくない．

8 (a) 成分が整数であるベクトルの集合を考えると，ベクトルの和は可能であるが，$\frac{1}{2}$ 倍はできない．
(b) xy 平面から（原点のみ残し） x 軸を取り除く．任意の c を掛けることができるが，ベクトルの和ができるとは限らない．$(1,1)+(-1,1)=(0,2)$ において，右辺のベクトルはない．

9 部分空間であるものは，(a) $b_1=b_2$ を満たすベクトルからなる平面，(d) $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ の線形結合，(e) $b_1+b_2+b_3=0$ を満たす平面，の 3 つのみである．

10 (a) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ の全体．(b) $\begin{bmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ の全体．(c) 対角行列の全体．

11 平面 $x+y-2z=4$ に関して，$(4,0,0)$ と $(0,4,0)$ の和は平面上にない（この平面が $(0,0,0)$ を通らないことが鍵だ）．

12 平行な平面 P_0 の式は $x+y-2z=0$ である．その平面上の 2 点を例えば $(2,0,1)$ と $(0,2,1)$ ととると，それらの和 $(2,2,2)$ も P_0 上にある．

13 平面 $\mathbf{P}$ と直線 $\mathbf{L}$ を含む最小の部分空間は，$\mathbf{P}$（直線 $\mathbf{L}$ が $\mathbf{P}$ に含まれるとき）か R^3（$\mathbf{L}$ が $\mathbf{P}$ に含まれないとき）である．

14 (a) 可逆行列の集合にはゼロ行列が含まれないので，可逆行列の集合は部分空間ではない．(b) 非可逆行列の和 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ は可逆行列であり，非可逆行列の集合は部分空間ではない．

15 (a) **真**．対称行列の集合は部分空間である．(b) **真**．$A^{\mathrm{T}}=-A$ を満たす行列の集合は部分空間である．(c) **真**．あるベクトル空間からとった任意のベクトルの集合に対し，それらベクトルは元のベクトル空間の部分空間を張る．

16 A の列空間は，ベクトル $(x,0,0)$ の全体からなる x 軸，すなわち，**直線**である．B の列空間は，ベクトル $(x,y,0)$ の全体からなる xy 平面である．C の列空間は，ベクトル $(x,2x,0)$ の全体からなる直線である．

17 (a) 消去法により，式 2 と式 3 が $0=b_2-2b_1$ と $0=b_1+b_3$ になる．よって，解を持つのは，$b_2=2b_1$ かつ $b_3=-b_1$ のときである．(b) 消去法により，式 3 が $0=b_1+b_3$ になる．よって，解を持つのは $b_3=-b_1$ のときである．

18 C の列の線形結合は，A の列の線形結合でもある．よって，$C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{bmatrix}$ と $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ の列空間は等しい．$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 6\end{bmatrix}$ の列空間は，それらとは異なる．「空間」がキーワードだ．

19 (a) すべての $\boldsymbol{b}$ に対して解を持つ．(b) 解を持つのは $b_3=0$ のときである．(c) 解を持つのは $b_3=b_2$ のときである．

20 列 $\boldsymbol{b}$ がすでに A の列空間に含まれていなければ，$\boldsymbol{b}$ を追加すると列空間が大きくなる．

$$[A\ \ \boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & \mathbf{1}\\ 0 & 0 & \mathbf{1}\end{bmatrix}\ \begin{matrix}\text{（列空間が大きくなる）}\\ \text{（}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\text{ は解なし）}\end{matrix}\qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & \mathbf{1}\\ 0 & 1 & \mathbf{1}\end{bmatrix}\ \begin{matrix}\text{（}\boldsymbol{b}\text{ が列空間に含まれる）}\\ \text{（}A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\text{ は解を持つ）}\end{matrix}$$

21 AB の列空間は A の列空間に**含まれる**（等しいこともある）．例えば，B がゼロ行列で A がゼロ行列でないとき，AB はゼロ行列で，AB の列空間（ゼロベクトルのみからなる $\mathbf{Z}$）は A の列空間より小さくなる．

22 $A\boldsymbol{z}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^*$ の解は $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ である．$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{b}^*$ が $\mathbf{C}(A)$ に含まれるとき，$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^*$ も $\mathbf{C}(A)$ に含まれる．

23 任意の 5×5 の可逆行列の列空間は $\mathbb{R}^5$ である．方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は必ず解を持つ（$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$）ので，その可逆行列の列空間にはすべての $\boldsymbol{b}$ が含まれる．

24 (a) **偽**．列空間に含まれ**ない**ベクトルの集合はベクトル空間とならない．(b) **真**．$\mathbf{C}(A)=\{\mathbf{0}\}$ となるのは，A がゼロ行列のときのみである．(c) **真**．$\mathbf{C}(A)=\mathbf{C}(2A)$．(d) **偽**．$A=I$ もしくは $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ のとき（他にもある），$\mathbf{C}(A-I)\neq\mathbf{C}(A)$ となる．

25 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ や $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathbf{2} \\ 1 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 1 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ のとき，$\mathbf{C}(A)$ に $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が含まれない．$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ のとき，$\mathbf{C}(A)$ は $\mathbb{R}^3$ における直線である．

26 すべての $\boldsymbol{b}$ に対して $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つとき，すべての $\boldsymbol{b}$ が A の列空間に含まれる．したがって，$\mathbf{C}(A) = \mathbb{R}^9$ となる．

27 (a) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ がいずれも $\mathbf{S}+\mathbf{T}$ に含まれるとき，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{s}_1 + \boldsymbol{t}_1$ と $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{s}_2 + \boldsymbol{t}_2$ と書ける．これより，$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{s}_2)+(\boldsymbol{t}_1+\boldsymbol{t}_2)$ も $\mathbf{S}+\mathbf{T}$ に含まれる．同様に，$c\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{s}_1 + c\boldsymbol{t}_1$ も $\mathbf{S}+\mathbf{T}$ に含まれる．以上より，$\mathbf{S}+\mathbf{T}$ は部分空間である．(b) $\mathbf{S}$ と $\mathbf{T}$ が異なる直線であるとき，$\mathbf{S} \cup \mathbf{T}$ は単にそれら 2 つの直線（部分空間でない）だが，$\mathbf{S}+\mathbf{T}$ はそれらが張る平面となる．

28 $\mathbf{S} = \mathbf{C}(A)$ および $\mathbf{T} = \mathbf{C}(B)$ のとき，$\mathbf{S}+\mathbf{T}$ は $M = [\,A \;\; B\,]$ の列空間である．

29 AB の列は A の列の線形結合である．したがって，$[\,A \;\; AB\,]$ の列はすべて $\mathbf{C}(A)$ に含まれる．しかし，$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ の列空間は，$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ の列空間より大きい．正方行列 A の列空間が $\mathbb{R}^n$ であることと，A が可逆行列であることは同値である．

30 $y = e^{-x}$ と $y = e^x$ は，$d^2y/dx^2 = y$ の線形独立な解である．$y = \cos x$ と $y = \sin x$ は，$d^2y/dx^2 = -y$ の線形独立な解である．$d^2y/dx^2 = -y$ の解からなる空間は，線形結合 $A\cos x + B\sin x$ の全体である．

31 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ がベクトル空間 $\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ に含まれるとき，それらは $\mathbf{V}$ と $\mathbf{W}$ の両方に含まれる．これより，すべての線形結合 $c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{y}$ が $\mathbf{V}$ と $\mathbf{W}$ の両方に含まれ，$\mathbf{V} \cap \mathbf{W}$ にも含まれる．

練習問題 3.2 （107 ページ）

1 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のとき $R\boldsymbol{x} = EA\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が成り立つ．また，$R\boldsymbol{x} = EA\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のとき $A\boldsymbol{x} = E^{-1}R\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が成り立つ．

2 $c = 4$ のとき，A のランクは 1，ピボット列は第 1 列，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の（零空間）特殊解は $(-2, 1, 0)$ と $(-1, 0, 1)$ である．$c \neq 4$ のとき，A のランクは 2，ピボット列は第 1 列と第 3 列，零空間特殊解は $(-2, 1, 0)$ である．$c = 0$ のとき，B はゼロ行列で，ランクは 0，$B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の（零空間）特殊解は $(1, 0)$ と $(0, 1)$ である．$c \neq 0$ のとき，B のランクは 1，ピボット列は第 1 列，$B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の（零空間）特殊解は $(-1, 1)$ である．

3 $R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$．任意の 2×2 の可逆行列 C を用いて $A = CR$ により作られる行列はすべて R と同じ零空間をもつ．

4 (a) $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 自由変数 x_2, x_4, x_5 ピボット変数 x_1, x_3 (b) $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 自由変数 x_3 ピボット変数 x_1, x_2

5 自由変数 x_2, x_4, x_5 に対応する（零空間）特殊解はそれぞれ $(-2,1,0,0,0)$，$(0,0,-2,1,0)$，$(0,0,-3,0,1)$ である．

6 (a) **偽**．任意の非可逆行列に自由変数がある．(b) **真**．可逆行列には自由変数がない．(c) **真**．ピボットが含まれ得る列が n 個しかない．(d) **真**．ピボットが含まれ得る行が m 個しかない．

7 この問題で考える行列は R ではなく U である．R の場合には，ピボット列に 1 は 1 つだけしかない．

(a) $\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，(b) $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$，(c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

8 (a) $R = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$，(b) $\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$．これら行簡約階段形 R のピボット列に単位行列が含まれることに注意せよ．

9 3×5 行列の第 4 列がすべて 0 であるとき，x_4 は**自由**変数である．対応する零空間特殊解は $\boldsymbol{x} = (0,0,0,1,0)$ である．なぜなら，0 からなる列にその 1 を掛けると $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ とできるからだ．

10 第 1 列と第 5 列が等しいとき，x_5 は自由変数である．対応する零空間特殊解は $(-1,0,0,0,1)$ である．

11 行列 A にピボットが 5 個あるとき，零空間が $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のみからなる．このとき列空間が $\mathbb{R}^5$ となる理由は，必ず $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解が存在し，すべての $\boldsymbol{b}$ が列空間に含まれるからだ．

12 n 列からなる行列にピボットが r 個あるとき，零空間特殊解は $\boldsymbol{n} - \boldsymbol{r}$ 個ある．零空間が $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のみからなるのは，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}$ のときである．$r = m$ のとき，列空間は $\mathbb{R}^m$ 全体である．これらはすべて重要だ！

13 数 12，3，1 を順に埋めると，$\mathbb{R}^3$ における $x - 3y - z = 12$ の完全解が得られる．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (\text{ある特殊解}) + (\text{零空間のベクトルすべて}).$$

14 第 5 列はそれより左の列の線形結合であるため，確実に第 5 列にはピボットがない．それ以外の列にピボットが 4 つあることから，零空間特殊解は $\boldsymbol{s} = (1,0,1,0,1)$ のみである．零空間は，このベクトル $\boldsymbol{s}$ のスカラー倍すべてからなる（$\mathbb{R}^5$ における直線である）．

15 零空間特殊解が $(2,2,1,0)$ と $(3,1,0,1)$ となるのは，自由変数が x_3, x_4 であり，$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ のときである．この R に任意の 2×2 可逆行列を掛けたものが求める A である．

16 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ の零空間は，零空間特殊解 $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ を通る直線である．A のランクは 3 である．

17 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ とすると，列空間 $\mathbf{C}(A)$ に $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ が含まれ，零空間 $\mathbf{N}(A)$ に $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ が含まれる．他に条件を満たす A は存在するだろうか？

18 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

19 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ は $\mathbf{N}(A) = \mathbf{C}(A)$ を満たす．rref$(A^{\mathrm{T}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ と A^{T} が等しくないことに注意せよ．

20 零空間と列空間が等しいとき，ピボットの数を r とすると $n - r = r$ が成り立つ．$n = 3$ のとき，$3 = 2r$ とすることは不可能である．零空間と列空間を等しくできるのは n が偶数のときのみである．

21 A と B のすべての列の積がゼロベクトルであるとき，B の列空間 は A の零空間に含まれる．例を挙げると，$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ と $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$．この例では，$\mathbf{C}(B)$ と $\mathbf{N}(A)$ は等しい．$B = O$ とすると，$\mathbf{C}(B)$ は $\mathbf{N}(A)$ より小さくなる．

22 成分をランダムに選んだ 3×3 行列 A では，R はほぼ確実に I となる．4×3 行列では，R はほぼ確実に I の下にゼロ行を 1 行追加したものとなる．3×4 行列では R はどうなるか？

23 $\mathbf{N}(A)$ が $\boldsymbol{x} = (2, 1, 0, 1)$ を通る直線のとき，A にはピボットが **3** 個ある（4 列からなり，零空間特殊解が 1 個）．行簡約階段形は $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ である．

24 $R = [\,1 \;\; -2 \;\; -3\,]$，$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，$R = I$.

25 (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$．(b) 8 つの行列はすべて R である！

26 $B = [\,A \;\; A\,]$ の零空間は，$\mathbb{R}^4$ の任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ -\boldsymbol{y} \end{bmatrix}$ すべてからなる．

A と $-A$ に対応する R は等しい．なぜなら，零空間が等しいからだ（A と $-A$ は行空間も等しい．また，A と $-A$ は列空間も等しいが，列空間が等しいことは R が等しいことの必要条件ではない．R により零空間と行空間が決まる）．

27 $C\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のとき，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ かつ $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が成り立つ．したがって，$\mathbf{N}(C) = \mathbf{N}(A) \cap \mathbf{N}(B)$（共通集合）．

28 A に対する R_0 と R は $R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ と $R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ である．B と C に対する R_0 と R は

$$R_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ と } R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ である．}$$

29 $R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ と $N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$．

30 A と A^{T} はランクが等しく，したがってピボットの個数も等しい．$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ とすると，A のピボット列が第 2 列であるのに対し，A^{T} のピボット列は第 1 列と異なる．

31 $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & \boldsymbol{\frac{bd}{a}} & \boldsymbol{\frac{cd}{a}} \\ g & \boldsymbol{\frac{bg}{a}} & \boldsymbol{\frac{cg}{a}} \end{bmatrix}$（ただし，$a \neq 0$），$B = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & 9 & \mathbf{-4.5} \\ 1 & \mathbf{3} & \mathbf{-1.5} \\ 2 & 6 & -3 \end{bmatrix}$，$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \boldsymbol{\frac{bc}{a}} \end{bmatrix}$（ただし $a \neq 0$）．

32 ランクが 1 のとき，R には第 2 行が存在しない！

33 ピボット列とピボット行を残して得られる $r \times r$ の可逆行列は $S = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$，$S = [1]$，$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$．

34 (a) A と B の行簡約階段形 R が等しいので，それらの零空間は等しく，行空間も等しい．(b) A と B の行簡約階段形 R が等しいとき，A は**可逆**行列と B の積である．この事実は重要だ！

35 （訳注：第 1 刷に原書由来の誤り．A^{T} の $(3,6)$ 成分は 1 ではなく -1 が正しい．）方程式 $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ の等式をすべて足すと $0 = 0$ となる．自由変数は y_3, y_5, y_6 である．$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ の解は，$(-1,0,0,1,-1,0)$ と $(0,0,-1,-1,0,1)$ と $(0,-1,0,0,1,-1)$ の線形結合である．ループを一周する流れに着目せよ．それら 3 つのベクトルは，3 つの小さなループを一周する流れとなっている．（訳注：消去法により零空間特殊解を求めると，$(1,1,1,0,0,0)$ と $(1,0,0,-1,1,0)$ と $(1,1,0,-1,0,1)$ の 3 つが得られる．解答の 3 つのベクトルは，消去法により得られる零空間特殊解の線形結合である．）

36 $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$．$C^{\mathrm{T}}$ のピボット列を並べると $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ となる．A に含まれる可逆行列 S は $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$．

37 AB の列空間は，ベクトル $(AB)\boldsymbol{x}$ すべてからなる．それらベクトルは $A(B\boldsymbol{x})$ と等しく，A の列空間にも含まれる．

38 行列積において，AB の各列は，対応する B の列に A を掛けたものである．したがって，B の第 j 列が B におけるそれより左の列の線形結合であるとき，AB の第 j 列は AB におけるそれより左の列を同じ係数で線形結合したものとなる．これより，$\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(B)$ である．AB が新しいピボット列を持つことはない．

39 $AB=I$ であり，ランクが n だとする．このとき，$\text{rank}(AB) \le \text{rank}(A)$ より，$\text{rank}(A)=n$ でなければならない．すなわち，A は可逆行列である．B の右逆行列は，左逆行列でもあり，$BA=I$ と $B=A^{-1}$ が成り立つ．

40 A と B のランクは高々 2 である．よって，それらの積 AB のランクも高々 2 である．BA は 3×3 行列であるので，I とはならない（$AB=I$ であったとしても）．

例：$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$BA=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$．

41 $A=\begin{bmatrix}I&I\end{bmatrix}$ に対して $N=\begin{bmatrix}I\\-I\end{bmatrix}$ である．$B=\begin{bmatrix}I&I\\0&0\end{bmatrix}$ に対する N は A に対する N と同じ．

$C=\begin{bmatrix}I&I&I\end{bmatrix}$ に対して $N=\begin{bmatrix}-I&-I\\I&0\\0&I\end{bmatrix}$ である．

42 $m\times n$ 行列 Z は，対角成分の左上から r 個が 1 である．それ以外の成分はすべて 0 である．

43 (a) $R_0=\begin{bmatrix}I&F\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r\times r & r\times(n-r)\\(m-r)\times r & (m-r)\times(n-r)\end{bmatrix}$. (b) $B=\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}$. (c) $C=\begin{bmatrix}I&0\end{bmatrix}$. (d) $\textbf{rref}(R_0^{\mathrm{T}})=\begin{bmatrix}I&0\\0&0\end{bmatrix}$. (e) $\textbf{rref}(R_0^{\mathrm{T}}R_0)=\begin{bmatrix}I&0\\0&0\end{bmatrix}$ （(d) の答と同じ）．

44 行・列簡約階段形は必ず $\begin{bmatrix}I&0\\0&0\end{bmatrix}$ となる．ここで I は $r\times r$ である．

45 $A=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}$ に対し，部分行列 $W=\begin{bmatrix}1&4\\2&5\end{bmatrix}$ は可逆で $W^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}-5&4\\2&-1\end{bmatrix}$ である．このとき，$W^{-1}\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$ が成り立ち，$R=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}$ における第 3 列 F に一致する．

46 第 1 ブロック行に JW^{-1} を掛けると第 2 ブロック行ができる．

練習問題 3.3 （121 ページ）

1 $\begin{bmatrix}2&4&6&4&b_1\\2&5&7&6&b_2\\2&3&5&2&b_3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&4&6&4&b_1\\0&1&1&2&b_2-b_1\\0&-1&-1&-2&b_3-b_1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}2&4&6&4&b_1\\0&1&1&2&b_2-b_1\\0&0&0&0&b_3+b_2-2b_1\end{bmatrix}\begin{matrix}4\\-1\\0\end{matrix}$

$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ が解を持つのは，$b_3+b_2-2b_1=0$ のときである．列空間は，$(2,2,2)$ と $(4,5,3)$ の線形結合すべてからなり，**それは平面** $b_3+b_2-2b_1=0$ だ！零空間は $\boldsymbol{s}_1=(-1,-1,1,0)$ と $\boldsymbol{s}_2=(2,-2,0,1)$ の線形結合すべてからなる．完全解は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_p+c_1\boldsymbol{s}_1+c_2\boldsymbol{s}_2$ である．

$$\begin{bmatrix} R_0 & \boldsymbol{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ より，特殊解 $x_p = (4, -1, 0, 0)$ が求まる．

2 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & b_1 \\ 6 & 3 & 9 & b_2 \\ 4 & 2 & 6 & b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$．これより，$[\, R_0 \ \ \boldsymbol{d} \,] = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 3/2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ となる．

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つのは，$b_2 - 3b_1 = 0$ かつ $b_3 - 2b_1 = 0$ のときである．列空間 $\mathbf{C}(A)$ は $(2, 6, 4)$ を通る直線であり，それは 2 つの平面 $b_2 - 3b_1 = 0$ と $b_3 - 2b_1 = 0$ の共通部分（交線）である．零空間は $\boldsymbol{s}_1 = (-1/2, 1, 0)$ と $\boldsymbol{s}_2 = (-3/2, 0, 1)$ の線形結合すべてからなる．特殊解は $\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{d} = (5, 0, 0)$ であり，完全解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + c_1\boldsymbol{s}_1 + c_2\boldsymbol{s}_2$ である．

3 完全解 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$．完全解 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$．

4 完全解 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_n = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0) + x_2(-3, 1, 0, 0) + x_4(0, 0, -2, 1)$．

5 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & b_1 \\ 2 & 5 & -4 & b_2 \\ 4 & 9 & -8 & b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_1 - b_2 \end{bmatrix}$ より，左の方程式が解を持つのは $b_3 - 2b_1 - b_2 = 0$ のときである．そのとき，後退代入を行えば $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の特殊解と $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の（零空間）特殊解が求まる．

完全解は $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 5b_1 - 2b_2 \\ b_2 - 2b_1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$．$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & b_1 \\ 4 & 4 & 0 & b_2 \\ 8 & 8 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & b_1/2 \\ 0 & 1 & -1 & b_2/4 - b_1/2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_2 \end{bmatrix}$ より，右の方程式が解を持つのは $b_3 = 2b_2$ のときである．そのとき，完全解は $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} b_1/2 \\ b_2/4 - b_1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$．

6 左の方程式が解を持つのは $b_2 = 2b_1$ かつ $3b_1 - 3b_3 + b_4 = 0$ のときである．そのとき，完全解は $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 5b_1 - 2b_3 \\ b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}_p$ となる．右の方程式が解を持つのは $b_2 = 2b_1$ かつ $3b_1 - 3b_3 + b_4 = 0$ のときである．そのとき，完全解は $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 5b_1 - 2b_3 \\ b_3 - 2b_1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である．

7 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & b_1 \\ 3 & 8 & 2 & b_2 \\ 2 & 4 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & b_2 \\ 0 & -1 & -1 & b_2 - 3b_1 \\ 0 & -2 & -2 & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix}$ もう 1 ステップ消去法を進めると，
$\boldsymbol{b_3 - 2b_2 + 4b_1 = 0}$ のとき，
(第 3 行) $-$ 2(第 2 行) $+$ 4(第 1 行) $= [0 \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0]$ となる．

8 (a) すべてのベクトル $\boldsymbol{b}$ が $\mathbf{C}(A)$ に含まれる．行が線形独立で，ゼロベクトルとなる線形結合は，すべての係数が 0 の場合だけだ．(b) (第 3 行) $-$ 2(第 2 行) $= \mathbf{0}$ より，$b_3 = 2b_2$ である必要がある．

9 (a) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) の 2 つ目の式により，零空間に含まれる（零空間）特殊解が 1 つなくなる．

10 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ の特殊解は $\boldsymbol{x}_p = (2, 4, 0)$ であり，零空間は $\boldsymbol{x}_n = (c, c, c)$ からなる．そのような A は他にも多数ある！

11 1×3 行列からなる方程式には，自由変数が少なくとも **2** つある．しかし，問題 10 の $\boldsymbol{x}_n$ には **1** つしかない．

12 (a) $A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}$ かつ $A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}$ のとき，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ や $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解である．(b) $A(2\boldsymbol{x}_1 - 2\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0}$，$A(2\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{b}$.

13 (a) 特殊解 $\boldsymbol{x}_p$ の係数は必ず 1 でなくてはならない．$2\boldsymbol{x}_p$ は，$A\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{b}$ の解となる．(b) 任意の解を特殊解 $\boldsymbol{x}_p$ にできる．A のランクが m ならば，特殊解 $\boldsymbol{x}_p$ は $\boldsymbol{0}$ のみである．(c) $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$ では，$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$（長さ $\sqrt{2}$）は $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$（長さ 2）より短い．(d) A が可逆行列であるとき，零空間に含まれる解は $\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$ のみである．

14 第 5 列にピボットがないとき，x_5 は**自由**変数である．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解はゼロベクトルのみ**ではない**．方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解が存在するとき，解は**無限個**ある．

15 U の第 3 行にピボットがないとき，第 3 行は**ゼロ行**である．$U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ が解を持つのは，$\boldsymbol{c_3 = 0}$ のときのみである．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を**持たないかもしれない**．なぜならば，U に他にゼロ行があり，$c_i = 0$ の必要があるかもしれないからだ．

16 ランクは高々 **3** である．ランクが最大となるとき，すべての行にピボットがある．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は**常に解を持つ**．列空間は $\mathbb{R}^3$ 全体である．具体例の 1 つは，任意の 3×2 行列を F として，$A = [\,I \quad F\,]$ である．

17 6×4 行列のランクは高々 **4** である．ランクが最大となるとき，すべての**列**にピボットがある．列は線形独立である.（方程式に解があれば）解は**唯一である**．零空間は**ゼロベクトルのみ**である．このとき，$R_0 = \mathbf{rref}(A) = \begin{bmatrix} I & (4 \times 4) \\ O & (2 \times 4) \end{bmatrix}$ である．

18 左の行列のランクは 2 である．右の行列のランクは，$q = 2$ のとき 2 であり，それ以外のとき 3 である．転置行列のランクは元の行列のランクと等しい！

19 $A\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}$ および $A\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}$ であるとき，$A(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0}$ なので，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}$ の任意の解に $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ を足したものも解となる．したがって，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}$ の解 $\boldsymbol{x}$ は唯一ではない．$\boldsymbol{B}$ が A の列空間に含まれないとき，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}$ は**解を持たない**．

20 A では，$q=3$ のときランクが 1 であり，それ以外の q のときランクは 2 である．B では，$q=6$ のときランクが 1 であり，それ以外の q のときランクは 2 である．A と B のいずれも，ランクが 3 となることはない．

21 (a) $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}[\,x\,]=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ の解の個数は $\boldsymbol{b}$ に依存して 0 または 1 である．(b) $\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=[\,b\,]$ は，すべての b で解が無数にある．(c) A のランク r について $r<m$ かつ $r<n$ のとき，解の個数は 0 または ∞ となる．そのような最も単純な例は，ゼロ行列である．(d) A が可逆な正方行列であるとき，すべての $\boldsymbol{b}$ に対し解が 1 個ある（例：$A=I$）．

22 (a) $r<m$，常に $r\leq n$ は成り立つ．(b) $r=m$ かつ $r<n$．(c) $r<m$ かつ $r=n$．(d) $r=m=n$．

23 $\begin{bmatrix}2&4&4\\0&3&6\\0&0&0\end{bmatrix}\to R_0=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$，$R=\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&2\end{bmatrix}$．$\begin{bmatrix}2&4&4\\0&3&6\\0&0&5\end{bmatrix}\to R_0=I=R.$

$\begin{bmatrix}0&0&4\\0&1&0\end{bmatrix}\to R_0=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=R.$

24 A が可逆な正方行列のとき $R_0=I$ となる．したがって，三角行列では，対角成分がすべて非ゼロでなければならない．

25 $\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&0&4&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}$．$\begin{bmatrix}1&2&3&5\\0&0&4&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&-1\\0&0&1&2\end{bmatrix}$．$R_0\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ より，$\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix}-2\\\mathbf{1}\\0\end{bmatrix}$．自由変数を $x_2=0$ とすると，$\boldsymbol{x}_p=(-1,0,2)$ となる（ピボット列に I が含まれるため）．$R_0=R$ であることに注意せよ．

26 $[\,R_0\ \ \boldsymbol{0}\,]=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ より，$\boldsymbol{s}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$．$[\,R_0\ \ \boldsymbol{d}\,]=\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&0&1&\frac{5}{2}\\0&0&0&4\end{bmatrix}$ より，3 つ目の式が $0=4$ となって矛盾するので解はない．

27 $\begin{bmatrix}1&0&2&3&2\\1&3&2&0&5\\2&0&4&9&10\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&3&2\\0&3&0&-3&3\\0&0&0&3&6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&2&0&-4\\0&1&0&0&3\\0&0&0&1&2\end{bmatrix}$．これより，$\boldsymbol{x}_p=\begin{bmatrix}-4\\3\\0\\2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}_n=x_3\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\0\end{bmatrix}$．

28 $A=\begin{bmatrix}1&1\\0&2\\0&3\end{bmatrix}$ とすると，$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ の唯一解は $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ である．2×3 行列からなる方程式が唯一解を持つことありえないので，B は存在しない．

29 $A=\begin{bmatrix}1&3&1\\1&2&3\\2&4&6\\1&1&5\end{bmatrix}$ は，$LU=\begin{bmatrix}1&&&\\1&1&&\\2&2&1&\\1&2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&1\\0&-1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ と分解でき，ランクは $r=2$ である．$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ および $U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ に対する（零空間）特殊解は $\boldsymbol{s}=(-7,2,1)$ である．$\boldsymbol{b}=(1,3,6,5)$ は A の

第 3 列に等しいので，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の特殊解の 1 つは $(0,0,1)$ であり，完全解は $\boldsymbol{x}=(0,0,1)+c\boldsymbol{s}$ となる（自由変数を $x_3=0$ とした $\boldsymbol{x}_p=(7,-2,0)$ も特殊解である）．$\boldsymbol{b}=(1,0,0,0)$ のとき，消去法により $U\boldsymbol{x}=(1,-1,0,1)$ となり，その 4 つ目の式が $0=1$ となって矛盾するので，この $\boldsymbol{b}$ に対しては解が存在しない．

30 $A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ の完全解が $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\c\end{bmatrix}$ であるとき，$A=\begin{bmatrix}1&0\\3&0\end{bmatrix}$ である．

31 (a) $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ の（零空間）特殊解が $\boldsymbol{s}=(2,3,1,0)$ のみであるとき，完全解は $\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{s}$（直線）である．$A$ のランクは $4-1=3$ である．(b) $\boldsymbol{s}$ の第 4 成分 x_4 は自由変数ではない．$R_0=\begin{bmatrix}1&0&-2&0\\0&1&-3&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$．

(c) すべての $\boldsymbol{b}$ について $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ は解を持つ．なぜなら，A と R_0 が行についてフルランク $r=3$ だからだ．

32 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と $C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の完全解が同じであるとき，A と C は大きさが同じであり，零空間も同じである（$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ とする）．$\boldsymbol{b}=(A$ の第 1 列$)$ のとき，$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解は $\boldsymbol{x}=(1,0,\ldots,0)$ であり，この $\boldsymbol{x}$ は $C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ の解でもある．これより，A と C の第 1 列は等しい．他の列についても同様の議論が成り立ち，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$ となる．

33 R_0（ランク r の $m\times n$ 行列）の列空間は，R_0 の r 本のピボット列（$m\times m$ 単位行列の最初の r 列）が張る空間である．（R_0 から $m-r$ 個のゼロ行を取り除いた）R の列空間は，r 次元空間 $\mathbb{R}^r$ 全体である．

練習問題 3.4 （135 ページ）

1 $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=0$ のとき $c_3=c_2=c_1=0$ となる．$\boldsymbol{0}$ となる線形結合は他になく，したがって，最初の 3 つの列ベクトルは線形独立である．

$\begin{bmatrix}1&1&1&2\\0&1&1&3\\0&0&1&4\end{bmatrix}\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ の解の 1 つは $\boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}1\\1\\-4\\1\end{bmatrix}$ である．これより，$\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2-4\boldsymbol{v}_3+\boldsymbol{v}_4=\boldsymbol{0}$ が成り立つ（線形従属である）．

2 $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ は線形独立である（-1 が異なる位置にある）．与えられた（$\mathbb{R}^4$ に含まれる） 6 つのベクトルがいずれも $(1,1,1,1)\cdot\boldsymbol{v}=0$ を満たす（超）平面上にあるので，これら 6 つのベクトルのうち 4 つのベクトルが線形独立となることはない．

3 $a=0$ のとき，(第 1 列) $=\mathbf{0}$ である．$d=0$ のとき，b(第 1 列) $-\,a$(第 2 列) $=\mathbf{0}$ である．$f=0$ のとき，すべての列の第 3 成分がゼロである（ベクトルはいずれも xy 平面に含まれ，3 つのベクトルは必ず線形従属となる）．

4 $U\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より,（後退代入を行うと）まず $z=0$，次に $y=0$，最後に $x=0$ が得られる．行列が正方行列かつ三角行列のとき，**対角成分がすべてゼロでないとき**，行列の列は線形独立である（行列は可逆行列である）．

5 (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -18/5 \end{bmatrix}$: 可逆行列 $\Rightarrow$ 列が線形である.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & -7 & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より，3 つの列の和が $\mathbf{0}$ になる.

6 第 1 列，第 2 列，第 4 列は線形独立である．線形独立となるのは，他にも第 1 列，第 3 列，第 4 列，および，第 2 列，第 3 列，第 4 列などがある（しかし，第 1 列，第 2 列，第 3 列は線形独立ではない）．行列 A において線形独立となるのは，同じ列番号の組合せである（列そのものは同じではない！）．その理由は，第 1 行の 2 倍を第 4 行から引くような行列 E を用いて $EA=U$ が成り立つからである．つまり，A と U は同じ零空間を持つ（列が線形従属となる性質が同じ）．

7 $\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3=\mathbf{0}$ が成り立つ．なぜなら，$(\boldsymbol{w}_2-\boldsymbol{w}_3)-(\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_3)+(\boldsymbol{w}_1-\boldsymbol{w}_2)=\mathbf{0}$．したがって，ベクトルの差は**線形従属**であり,「差」行列 $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ は非可逆行列である.

8 $c_1(\boldsymbol{w}_2+\boldsymbol{w}_3)+c_2(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_3)+c_3(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)=\mathbf{0}$ のとき，$(c_2+c_3)\boldsymbol{w}_1+(c_1+c_3)\boldsymbol{w}_2+(c_1+c_2)\boldsymbol{w}_3=\mathbf{0}$ である．$\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3$ は線形独立なので，$c_2+c_3=c_1+c_3=c_1+c_2=0$ でなければならない．その唯一解は $c_1=c_2=c_3=0$ である．$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ の線形結合が $\mathbf{0}$ となるのは，係数が $c_1=c_2=c_3=0$ のときのみである.（問題 7 の解答の行列 A において，-1 をすべて 1 に変えると，行列 A は可逆行列になる）.

9 (a) $\mathbb{R}^3$ に含まれる 4 つのベクトルは，3×4 行列 A の列である．このとき，$A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ には非ゼロ解が存在する．なぜなら，自由変数が少なくとも 1 つあるからだ．　(b) $[\,\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\,]$ のランクが 0 または 1 のとき，2 つのベクトルは線形従属である.（「2 つのベクトルが同じ直線上にある」や「一方が他方のスカラー倍である」と言うのは問題ないが,「$\boldsymbol{v}_2$ が $\boldsymbol{v}_1$ のスカラー倍である」は**正しくない**．$\boldsymbol{v}_1$ が $\mathbf{0}$ であるかもしれないからだ.）　(c) $\boldsymbol{v}_1$ と $\mathbf{0}$ の非自明な線形結合で $\mathbf{0}$ となるものがある．例えば，$0\boldsymbol{v}_1+3(0,0,0)=(0,0,0)$.

10 問題で与えられた平面は，$A = [\,1\ \ 2\ {-3}\ {-1}\,]$ の零空間である．3 つの自由変数から，3 つの線形独立な解 $(x, y, z, t) = (-2, 1, 0,\ 0)$，$(3, 0, 1, 0)$，$(1, 0, 0, 1)$ が得られる．これら零空間特殊解の線形結合により，他の（すべての）解が得られる．

11 (a) $\mathbb{R}^3$ における直線　(b) $\mathbb{R}^3$ における平面　(c) $\mathbb{R}^3$ の全体　(d) $\mathbb{R}^3$ の全体．

12 A の列空間に $\boldsymbol{b}$ が含まれるのは，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に解があるときである．A の行空間に $\boldsymbol{c}$ が含まれるのは，$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}$ に解があるときである．**偽**．なぜなら，ゼロベクトルは常に行空間に含まれるから．

13 A と U の列空間と行空間はすべて次元が 2 である．**A の行空間と U の行空間は等しい**．なぜなら，U の行は A の行の線形結合であり，逆も成り立つからだ．

14 $\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})$ および $\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})$．これら 2 つのベクトルの対は，同じ空間を**張る**．2 つのベクトルの対が同じ空間の基底となるのは，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{w}$ が**線形独立**のときである．

15 n 本の線形独立なベクトルが張る空間の次元は n である．それら n 本のベクトルは，その空間の**基底**である．それら n 本のベクトルが行列 A の列であるとき，m は n より**小さくない**（$m \geq n$）．$m = n$ のとき，行列 A は**可逆**である．

16 この問題の解となる基底は唯一ではない！　(a) $(1, 1, 1, 1)$ は，成分が等しいベクトル (c, c, c, c) すべてからなる空間の基底である．　(b) $(1, -1, 0, 0), (1, 0, -1, 0), (1, 0, 0, -1)$ は，成分の和がゼロとなるベクトルすべてからなる空間の基底である．　(c) $(1, -1, -1, 0), (1, -1, 0, -1)$ は，$(1, 1, 0, 0)$ と $(1, 0, 1, 1)$ に直交するベクトルすべてからなる空間の基底である．　(d) I の列は，I の列空間の基底である．$\mathbf{N}(I) = \mathbf{Z} = \{\mathbf{0}\}$ の基底は,（慣習により）空集合とする．

17 $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ の列空間は $\mathbb{R}^2$ なので，$\mathbb{R}^2$ の任意の基底を選べばよい．U の行空間の基底には，{ 第 1 行, 第 2 行 }，{ 第 1 行, (第 1 行 + 第 2 行)}，{ 第 1 行, ($-$第 2 行)} などがある．

18 (a) それら 6 つのベクトルは $\mathbb{R}^4$ を**張らないかもしれない**．　(b) それら 6 つのベクトルは線形独立**ではない**．　(c) 4 つのベクトルをとると，基底**となるかもしれない**．

19 n 個の列が線形独立である $\Rightarrow$ ランク n．n 個の列が $\mathbb{R}^m$ を張る $\Rightarrow$ ランク m．n 個の列が $\mathbb{R}^m$ の基底である $\Rightarrow$ **ランク** $= m = n$．ランクは，**線形独立**な列の数である．

20 基底の 1 つは，$\{(2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}$ である．xy 平面との共通部分の基底の 1 つは $\{(2, 1, 0)\}$ である．法線ベクトル $(1, -2, 3)$ は，平面に直交するベクトルすべてからなる部分空間の基底である．

21 (a) $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の唯一解は $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ である．なぜなら，**列が線形独立であるから**だ．　(b) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持つ．なぜなら，**基底ベクトルは** $\mathbb{R}^5$ **を張る**からだ．基底ベクトルの線形結合により，すべての $\boldsymbol{b}$ を与えることができる．要点：A の列が $\mathbb{R}^m$ の基底であるとき，すべての $\boldsymbol{b}$ に対して解が唯一存在する．

22 (a) 真　(b) 偽．なぜなら，$\mathbb{R}^6$ の基底ベクトルが $\mathbf{S}$ に含まれないかもしれないからだ．

23 A と U からそれぞれ第 1 列と第 2 列を取り出すと，A と U の列空間（**異なる**）の基底となる．A と U からそれぞれ第 1 行と第 2 行を取り出すと，A と U の行空間（**等しい**）の基底となる．$(1, -1, 1)$ は零空間（**等しい**）の基底である．消去法では，**行空間と零空間**は変化しない．

24 (a) **偽**．$A = [1\ \ 1]$ の列は線形従属であるが，行は線形独立である． (b) **偽**．$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ では，列空間と行空間は等しくない． (c) **真**．A が可逆行列のとき，列空間と行空間の次元はいずれも 2 である．$A = O$ のとき，列空間と行空間の次元はいずれも 0 である．そうでなければ，列空間と行空間の次元はいずれも 1 である． (d) **偽**．列が線形従属のとき，列は $\mathbf{C}(A)$ の基底ではない．

25 (a) $\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_k$ を列とする行列を A とする．そして，線形独立であるような最初の n 個のベクトルを選ぶ（仮定より，列は $\mathbb{R}^n$ を張る）．

(b) $\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_j$ を行とする行列を A とする．さらに，単位行列の n 個の行を A に追加する．消去法を行うと，線形独立な最初の j 行が残り，さらに $\mathbb{R}^n$ の基底に必要な残りの $n - j$ 行が求まる．

26 $c = 0$ かつ $d = 2$ のとき，A のランクは 2 である．$c = \pm d$ でなければ $B = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$ のランクは 2 である．

27 (a) すべての対角行列からなる空間の基底：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) すべての対称行列からなる空間の基底は，(a) の答に $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ を追加したものである．

(c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

これらは，(a) すべての対角行列，(b) すべての対称行列，(c) すべての交代行列からなる空間の単純な基底である（基底は多数存在する）．それぞれ空間の次元は，(a) 3，(b) 6，(c) 3 である．

28 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$．すべての階段行列からなる集合は，部分空間**ではない**．その集合は，上三角行列からなる空間を**張る**（上三角行列 U は階段行列でないかもしれない）．

29 列について成分の和がゼロ：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$．列と行について成分の和がゼロ：$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

30 (a) すべての可逆行列が張る空間は，3×3 行列すべてからなる空間 $\mathbf{M}$ である． (b) すべてのランク 1 行列が張る空間も，3×3 行列すべてからなる空間 $\mathbf{M}$ である． (c) I が張る空間は，I のすべてのスカラー倍 cI からなる空間である．

31 $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$．次元は 4 である．

32 (a) $y(x) = C$（定数） (b) $y(x) = 3x$． (c) $y' = 3$ の解は，$y(x) = 3x + C = y_p + y_n$ である．

33 $y(0) = 0$ であるには，$A+B+C = 0$ である必要がある．基底の 1 つは $\{\cos x - \cos 2x,\ \cos x - \cos 3x\}$ である．

34 (a) $y(x) = e^{2x}$ は，$y' = 2y$ の解すべてからなる空間の基底である．(b) $y = x$ は，$dy/dx = y/x$ の解すべてからなる空間の基底である（1 階線形微分方程式 $\Rightarrow$ 解空間の基底が 1 つの関数からなる）．

35 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ の例．次元 1：$x, 2x, 3x$．次元 2：$x, 2x, x^2$．次元 3：x, x^2, x^3．

36 3 次多項式関数の基底は $1, x, x^2, x^3$ である．$p(1) = 0$ を満たす関数からなる部分空間の基底は $x-1$, x^2-1, x^3-1 である（4 次元空間に含まれる 3 次元部分空間）．

37 $\mathbf{S}$ の基底：$(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, -1)$．$\mathbf{T}$ の基底：$(1, -1, 0, 0), (0, 0, 2, 1)$．共通部分 $\mathbf{S} \cap \mathbf{T}$ は $(3, -3, 2, 1)$ のスカラー倍からなり，$\mathbb{R}^4$ における 3 本の等式に対する零空間である．したがって，その次元は 1 である．

38 5×5 行列 $[\,A\ \ \boldsymbol{b}\,]$ が可逆行列であるとき，$\boldsymbol{b}$ は A の列の線形結合ではない．よって，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ には解がない．$[\,A\ \ \boldsymbol{b}\,]$ が非可逆行列であり,（ランクが 4 であることから）A の 4 個の列が線形独立であるとき，$\boldsymbol{b}$ はそれら 4 個の列の線形結合で表わせる．このとき，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つ．

39 $y'' = y$ の基底の 1 つは $y = e^x, y = e^{-x}$ である．$y'' = -y$ の基底の 1 つは $y = \cos x, y = \sin x$ である．

40 $\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix}$．6 つの置換行列 P は線形従属である．右辺の 5 つの置換行列は線形独立である．理由：4 つ目の行列のみ，$(1, 1)$ 成分が $P_{11} = 1$ であり，他の行列の線形結合では表せない．同様に，$(2, 2)$ 成分に着目すると，3 つ目の行列は他の線形結合で表せず，$(3, 3)$ 成分から 1 つ目の行列は他の線形結合で表せない．同様に続けることで，5 つの行列の係数がゼロでない線形結合によりゼロ行列ができないことが言える．挑戦問題：4×4 の置換行列のうち，線形独立なものはいくつあるか．

41 $\boldsymbol{x}$ の成分の並び換えでできるベクトルが張る空間 $\mathbf{S}$ の次元は (a) $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のとき 0, (b) $\boldsymbol{x} = (1, 1, 1, 1)$ のとき 1, (c) $\boldsymbol{x} = (1, 1, -1, -1)$ のとき 3（この $\boldsymbol{x}$ の成分を並び換えしてできるベクトルはすべて $(1, 1, 1, 1)$ に直交する）, (d) $\boldsymbol{x}$ の成分がすべて等しい場合でなく，かつ，成分の和がゼロでないとき 4．$\mathbf{S}$ の次元が 2 となるような $\boldsymbol{x}$ は存在しない．この素晴しい問題は，Mike Artin によって与えられた．次元を高くしても答は同じになる．すなわち，空間 $\mathbf{S}$ の次元は $0, 1, n-1, n$ のいずれかになる．

42 問題は，$\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{w}_k$ の全体が線形独立であることを言うことである．ここで，$\boldsymbol{u}_i$ と $\boldsymbol{v}_j$ の全体は $\boldsymbol{V}$ の基底であり，$\boldsymbol{u}_i$ と $\boldsymbol{w}_k$ の全体は $\boldsymbol{W}$ の基底である．$\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{w}_k$ の線形結合が $\mathbf{0}$ となるとする．証明するには，そのすべての係数がゼロであることを言う必要がある．重要な考え方：$\mathbf{0}$ となるその線

形結合において，$\boldsymbol{u}_i$ と $\boldsymbol{v}_j$ からできる部分 $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{V}$ に含まれる．したがって，残る $\boldsymbol{w}_k$ からできる部分は $-\boldsymbol{x}$ となる．このとき，$-\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{V}$ にも $\boldsymbol{W}$ にも含まれる．$-\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{V} \cap \boldsymbol{W}$ に含まれることから，$-\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{u}_i$ のみを線形結合して表すことができる．すると，$\mathbf{0}$ となる線形結合は，$\boldsymbol{u}_i$ と $\boldsymbol{v}_j$ （$\mathbf{V}$ に含まれる線形独立なベクトル）のみからなり，$\boldsymbol{u}_i$ と $\boldsymbol{v}_j$ の係数はすべてゼロでなければならない．このとき $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ であり，$\boldsymbol{w}_k$ の係数もすべてゼロである．

43 $\dim(\mathbf{V})+\dim(\mathbf{W}) = \dim(\mathbf{V}\cap\mathbf{W})+\dim(\mathbf{V}+\mathbf{W})$ の左辺が n より大きいとき，$\dim(\mathbf{V}\cap\mathbf{W})$ は必ず 0 よりも大きい．したがって，$\mathbf{V}\cap\mathbf{W}$ には非ゼロベクトルが存在する．より原始的な証明は次のものだ．$\mathbf{V}$ の基底ベクトルと $\mathbf{W}$ の基底ベクトルを並べたものを行列 A とする．すると，A は列数は A の行数よりも多く，$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ に非ゼロ解が存在する．その解 $\boldsymbol{x}$ により，($\mathbf{V}$ の基底ベクトルの線形結合) $=$ ($\mathbf{W}$ の基底ベクトルの線形結合) の係数が分かる．

44 $A^2 = O$ （ゼロ行列）のとき，この式は A の各列が A の零空間に含まれることを示している．すなわち，A の列空間は A の零空間に含まれる．次元定理より，列空間の次元が r のとき零空間の次元は $10 - r$ である．したがって，$r \leq 10 - r$ であり，これより $r \leq 5$ である．

練習問題 3.5 （149 ページ）

1 (a) 行空間と列空間の次元は 5．零空間の次元は $9 - 5 = 4$．左零空間の次元は $9 - 7 = 2$．4 つの基本部分空間の次元の和は $5 + 5 + 4 + 2 = 16 = m + n$.

(b) 列空間は $\mathbb{R}^3$ である．左零空間は $\mathbf{0}$ のみからなる（次元は 0 である）.

2 A：行空間の基底の 1 つは $(1, 2, 4)$（第 1 行）．零空間の基底の 1 つは $(-2, 1, 0)$, $(-4, 0, 1)$．列空間の基底の 1 つは $(1, 2)$（第 1 列）．左零空間の基底の 1 つは $(-2, 1)$．B：行空間の基底の 1 つは $(1, 2, 4)$, $(2, 5, 8)$（両方の行）．列空間の基底の 1 つは $(1, 2)$, $(2, 5)$（2 つの列）．零空間の基底の 1 つは $(-4, 0, 1)$．左零空間の基底は空集合である．なぜなら，B の行が線形独立であり，左零空間が $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ のみからなるからだ．

3 行空間の基底の 1 つは R の第 1 行と第 2 行をとったものである．列空間の基底の 1 つは，A のピボット列 $(1, 1, 0)$, $(3, 4, 1)$ である（R のピボット列ではない）．零空間の基底の 1 つは $(1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 2, -1, 0, 0)$, $(0, 2, 0, -2, 1)$．左零空間の基底の 1 つは $(1, -1, 1)$ であり，これは消去行列の逆行列 $E^{-1} = L$ の一番最後の行に等しい．

4 (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.　(b) 不可能．$r + (n - r)$ が 3 とならないので．　(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$　(d) $\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

(e) 不可能．行空間と列空間が等しいためには，$m = n$ でなければならない．このとき，$m - r = n - r$ より，零空間と左零空間の次元が等しい必要がある．4.1 節で，$\mathbf{N}(A)$ と $\mathbf{N}(A^{\mathrm{T}})$ がそれぞれ行空間と列空間に直交することを証明する．この問題では，零空間と左零空間は同じである．

5　$\mathbf{V}$ を行空間とする行列は $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ である．$\mathbf{V}$ を零空間とする行列は $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ である．AB^{T} はゼロ行列である（AB はゼロ行列ではない）．

6　A : 行空間の次元は 2，基底は $(0,3,3,3), (0,1,0,1)$．列空間の次元は 2，基底は $(3,0,1), (3,0,0)$．零空間の次元は 2，基底は $(1,0,0,0), (0,-1,0,1)$．左零空間の次元は 1，基底は $(0,1,0)$．B : 行空間の次元は 1，基底は (1)．列空間の次元は 1，基底は $(1,4,5)$．零空間の次元は 0，基底は空集合．左零空間の次元は 2，基底は $(-4,1,0), (-5,0,1)$．

7　3×3 の可逆行列 A : 行空間の基底と列空間の基底はいずれも $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$．零空間と左零空間の基底はいずれも空集合．行列 $B = \begin{bmatrix} A & A \end{bmatrix}$: 行空間の基底 $(1,0,0,1,0,0), (0,1,0,0,1,0), (0,0,1,0,0,1)$．列空間の来手 $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$．零空間の基底 $(-1,0,0,1,0,0), (0,-1,0,0,1,0), (0,0,-1,0,0,1)$．左零空間の基底は空集合．

8　行列 A, B, C の順に，行空間の次元は $3,3,0$，列空間の次元は $3,3,0$（行空間の次元に等しい），零空間の次元は $2,3,2$，左零空間の次元は $0,2,3$ である．

9　(a) 行空間と零空間がそれぞれ，2 つの行列間で等しい．行空間の次元であるランクは等しい．(b) 列空間と左零空間がそれぞれ，2 つの行列間で等しい．列空間の次元であるランクは等しい．

10　rand(3)（3×3 のランダム行列）では，ほぼ確実にランクは 3 になり，零空間と左零空間は $(0,0,0)$ のみからなる．rand(3,5)（3×5 のランダム行列）では，ほぼ確実にランクは 3 になり，零空間の次元はほぼ確実に 2 となる．

11　(a) 解がないことから，$r < m$ となる．また，常に $r \le n$ は成り立つ．この条件では，m と n を比較することはできない．(b) $m - r > 0$ より，左零空間には必ず非ゼロベクトルが含まれる．

12　前半 : 条件を満たす行列のうまい作り方は $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ というものだ．後半 : $r + (n - r) = n = 3$ が $2 + 2 = 4$ に適合しないので，行列を作ることができない．$\mathbf{N}(A)$ と $\mathbf{C}(A^{\mathrm{T}})$ の両方に含まれるベクトルは $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ のみである．

13　(a) 偽．一般に，行空間と列空間は異なる．

(b) 真．A と $-A$ では，4 つの基本部分空間がいずれも等しい．

(c) 偽．A と B を同じ大きさの可逆行列とすると，それらは同じ 4 つの基本部分空間を持つ．

14　U の非ゼロ行 $(1,2,3,4), (0,1,2,3), (0,0,1,2)$ をとると行空間の基底となる．零空間の基底は U の零空間の基底と等しく，$(0,1,-2,1)$ である．列空間の基底は $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ である（偶然，$\mathbf{C}(A) = \mathbf{C}(U) = \mathbb{R}^3$ となっている）．左零空間の基底は空集合である．

15　行交換を行っても，行空間と零空間は変化しない．行交換の後に左零空間に含まれるベクトルは $(2,1,3,4)$ である．

16 $A\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ かつ $\boldsymbol{v}$ が A の行であるならば，$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=0$ となる．したがって，$\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{v}$ 自身に直交することになり，$\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ でなければならない．

17 A： 行空間は yz 平面であり，列空間は xy 平面である．零空間は x 軸であり，左零空間は z 軸である．$I+A$： 行空間と列空間はいずれも $\mathbb{R}^3$ であり，零空間と左零空間はゼロベクトルのみからなる．

18 ある．一例：$a_{11}=1, a_{12}=0, a_{13}=1, a_{22}=0, a_{32}=1, a_{31}=0, a_{23}=1, a_{33}=0, a_{21}=1$（ゲームを決定するには，5 手を示す必要がある）．

19 (第 3 行) $-$ 2(第 2 行) + 第 1 行 = (ゼロ行) となることから，ベクトル $c(1,-2,1)$ は左零空間に含まれる．偶然ながら，そのベクトルは零空間にも含まれる．

20 (a) 零空間特殊解 $(-1,2,0,0)$ と $(-\frac{1}{4},0,-3,1)$ は，R_0 の行 （および，ER_0 の行）に直交する．(b) $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ には，線形独立な解が 1 つ存在する．それは，E^{-1} の最後の行である（$E^{-1}A=R_0$ にはゼロ行が 1 つあり，それは $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ を転置したものである）．

21 (a) $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{w}$ (b) $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{z}$ (c) ランクが 2 より小さくなるのは，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{w}$ が線形従属のとき，または，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{z}$ が線形従属のときである． (d) $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{w}\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}$ のランクは 2 である．

22 $$A=\begin{bmatrix} \\ \boldsymbol{u} & \boldsymbol{w} \\ \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$ $\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}$ は列空間を張る．
$\boldsymbol{v},\boldsymbol{z}$ は行空間を張る．

23 問題 22 と同様．行空間の基底は $(3,0,3),(1,1,2)$ であり，列空間の基底は $(1,4,2),(2,5,7)$ である．3×2 行列と 2×3 行列の積によってできる行列 A のランクは，2 つの行列それぞれのランクより大きくなることはない．したがって，行列 A のランクは 2 以下であり，3×3 行列 A は可逆ではない．

24 $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{d}$ は，$\boldsymbol{d}$ を A の**行空間**に含めようとする．解 $\boldsymbol{y}$ が唯一解となるのは，A の**左零空間**（A^{T} の零空間）が $\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ のみからなるときである．

25 (a) **真**．A と A^{T} はランクが等しい． (b) **偽**．$A=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$ と A^{T} は異なる左零空間を持つ．(c) **偽**．$\boldsymbol{C}(A)=\boldsymbol{C}(A^{\mathrm{T}})$ であったとしても，A は非対称な可逆行列となり得る． (d) **真**．A と $-A$ では必ず 4 つの基本部分空間が等しい．$A^{\mathrm{T}}=A$ または $A^{\mathrm{T}}=-A$ のとき，4 つの基本部分空間は A^{T} とも等しくなる．

26 $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ をランク 1 行列とするには，$d=bc/a$ とする．このとき，行空間の基底は (a,b) となり，零空間の基底は $(-b,a)$ となる．これら 2 つのベクトルは直交する！

27 「市松模様」行列 B と「チェス」行列 C は，いずれも $p\neq 0$ のときランクが 2 である．C の第 1 行と第 2 行が，C の行空間の基底である．$B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ には 6 つの（零空間）特殊解がある．$\mathbf{N}(C^{\mathrm{T}})$ の基底の 1 つは，$(-1,0,0,0,0,0,0,1),(0,-1,0,0,0,0,1,0)$ と I の第 3 列，第 4 列，第 5 列，第 6 列である．$\mathbf{N}(C)$ の基底はより難しい．$\mathbf{N}(C)$ に含まれるベクトルの 1 つは $(1,0,\ldots,0,-1)$ である．

28 $A=\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ の 4 つの基本部分空間は，2 対の直交する直線（$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}^{\perp}$，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{u}^{\perp}$）である．行列 B が同じ 4 つの基本部分空間を持つとき，$c\neq 0$ として $B=cA$ である．

29 (a) X の各列が $(1,1,1)$ のスカラー倍であるとき，$AX = 0$ となる．零空間の次元は 3 である．(b) $AX = B$ のとき，B の列の和がゼロベクトルとなる．列空間の次元は 6 である．(c) 3×3 行列には成分が 9 つあるため，$3 + 6 = \dim(\mathbb{R}^{3\times 3}) = 9$ である．

30 行空間が等しいことが鍵だ．それより，A の第 1 行は B の行の線形結合となるが，I に着目すると，取り得る線形結合は 1(B の第 1 行) のみである．I に対応する各行について同じことが言え，したがって $F = G$ が言える．

練習問題 4.1（162 ページ）

1 零空間に含まれる 2 つのベクトルはいずれも，行空間の $\mathbb{R}^3$ のベクトルに直交する．A の列空間と A^{T} の零空間（A の左零空間）は，$\mathbb{R}^2$ における直交する 2 直線である（ランクが 1 なので）．

2 ランクが 2 である 3×2 行列の零空間は $\mathbf{Z}$ である（2 つの列が線形独立なので，零空間はゼロベクトルのみからなる）．よって，$\boldsymbol{x}_n = \mathbf{0}$ であり，行空間は $\mathbb{R}^2$ である．列空間は左零空間に直交する平面であり，左零空間は $\mathbb{R}^3$ における直線である（ランクが 2 なので）．

3 (a) 1 つの方法:2 つの列をそのまま使い，(第3列) $= -$(第 1 列)$-$(第 2 列) とする．$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

(b) 不可能．理由：$\mathbf{N}(A)$ と $\mathbf{C}(A^{\mathrm{T}})$ は直交する部分空間である．$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に直交しない．

(c) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が $\mathbf{C}(A)$ に含まれ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ が $\mathbf{N}(A^{\mathrm{T}})$ に含まれることは不可能である．直交しないからだ．

(d) すべての行がすべての列に直交するとき，A と A の積はゼロ行列となる．そのような例の 1 つは，$A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ である．

(e) $(1,1,1)$ が零空間に含まれ（列の和がゼロベクトルとなる），かつ，$(1,1,1)$ が行空間にも含まれる．そのような行列は不可能である．

4 $AB = O$ のとき，B の列は A の**零空間**に含まれ，A の行は B の**左零空間**に含まれる．ランクが 2 であるならば，それら 4 つの基本部分空間の次元が 2 以上でなくてはならないが，3×3 行列ではそれは不可能である．

5 (a) $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持ち $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ が成り立つとき，$\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{b}$ に直交する．したがって，$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = (A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}) = 0$ が成り立つ．これは，$\mathbf{C}(A)$ が $\mathbf{N}(A^{\mathrm{T}})$ に直交することを改めて示している．(b) $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = (1,1,1)$ が解を持つとき，$(1,1,1)$ は A の行の線形結合である．よって，$(1,1,1)$ は**行空間**に含まれ，**零空間**に含まれるすべてのベクトル $\boldsymbol{x}$ に直交する．

6 3 本の等式にそれぞれ $y_1, y_2, y_3 = 1, 1, -1$ を掛けて足すと $0 = 1$ が導かれるので，方程式に解がない．部分空間の言葉で言うと，$\boldsymbol{y} = (1,1,-1)$ は左零空間に含まれる．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ が解を持つには $0 = (\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ である必要があるが，ここでは $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = 1$ となってしまった．

7 3 本の等式に $\boldsymbol{y} = (1,1,-1)$ を掛ける．すると，$x_1 - x_2 = 1$ 足す $x_2 - x_3 = 1$ 引く $x_1 - x_3 = 1$ の結果が $0 = 1$ となる．要点：$\mathbf{N}(A^{\mathrm{T}})$ に含まれるこのベクトル $\boldsymbol{y}$ は，$\boldsymbol{b} = (1,1,1)$ に直交しない．したがって，$\boldsymbol{b}$ は列空間に含まれず，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ には**解がない**．

8 図 4.3 において $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_r + \boldsymbol{x}_n$ を示した．ここで，$\boldsymbol{x}_r$ は行空間に含まれ，$\boldsymbol{x}_n$ は零空間に含まれる．このとき，$A\boldsymbol{x}_n = \mathbf{0}$ と $A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}_r + A\boldsymbol{x}_n = A\boldsymbol{x}_r$ が成り立つ．問題の例では，$\boldsymbol{x} = (1,0)$ であり，行空

間は $(1,1)$ を通る直線である．したがって，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_r + \boldsymbol{x}_n = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ と分離される．ベクトル $A\boldsymbol{x}_r$ が列空間に含まれる理由：$A\boldsymbol{x}$ は必ず $\mathbf{C}(A)$ に含まれる．

9 $A\boldsymbol{x}$ は必ず A の**列空間**に含まれる．$A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のとき，$A\boldsymbol{x}$ は A^{T} の零空間にも含まれる．これら部分空間は**直交する**．したがって，$A\boldsymbol{x}$ はそれ自身に直交する．結論： $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のとき $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

10 (a) $A^{\mathrm{T}} = A$ より，A の列空間と行空間は**等しい**．零空間は必ず行空間に直交するので，A の列空間と零空間は直交する． (b) $\boldsymbol{x}$ は零空間に含まれ，$\boldsymbol{z}$ は列空間（$=$ 行空間）に含まれる．したがって，これら「固有ベクトル」 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{z}$ は $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} = 0$ を満たす．

11 行列 A：零空間は $(-2,1)$ が張る空間．行空間は $(1,2)$ が張る空間．列空間は $(1,3)$ を通る直線．左零空間は $(3,-1)$ を通る直線で，$(1,3)$ を通る直線に直交する．

行列 B：零空間は $(0,1)$ が張る空間．行空間は $(1,0)$ が張る空間．列空間と左零空間は，A の列空間と左零空間にそれぞれ等しい．

12 $\boldsymbol{x} = (2,0)$ は $\boldsymbol{x}_r + \boldsymbol{x}_n = (1,-1) + (1,1)$ と分離される．

13 $V^{\mathrm{T}}W = O$ より，V の各列は W の各列に直交する．これは，$\mathbf{V}$ の各基底ベクトルが $\mathbf{W}$ の各基底ベクトルに直交することを意味する．このとき，$\mathbf{V}$ に含まれる**すべての**ベクトル $\boldsymbol{v}$（基底ベクトルの線形結合）が，$\mathbf{W}$ に含まれる**すべての**ベクトル $\boldsymbol{w}$ に直交する．

14 $A\boldsymbol{x} = B\widehat{\boldsymbol{x}}$ より $[\,A \;\; B\,]\begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ -\widehat{\boldsymbol{x}} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$．右辺が 0 であるような変数 4 つ等式 3 本からなる方程式は，必ず非ゼロ解を持つ．ここでは，$\boldsymbol{x} = (3,1)$ と $\widehat{\boldsymbol{x}} = (1,0)$ であり，$A\boldsymbol{x} = B\widehat{\boldsymbol{x}} = (5,6,5)$ が両方の列空間に含まれる．$\mathbb{R}^3$ における 2 つの平面は必ず交線を持つ．

15 $\mathbb{R}^n$ p 次元部分空間と q 次元部分空間は，$\boldsymbol{p+q>n}$ のとき少なくとも直接を共通集合として持つ（$\mathbf{V}$ と $\mathbf{W}$ から取った $p+q$ 個の基底ベクトルは線形独立になり得ない．したがって，$\mathbf{V}$ の基底ベクトルの線形結合であり， $\boldsymbol{W}$ の基底ベクトルの線形結合でもあるような非ゼロベクトルが存在する）．

16 $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ より，$(A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = 0$ が導ける．このとき，$\boldsymbol{y} \perp A\boldsymbol{x}$ であり，$\mathbf{N}(A^{\mathrm{T}}) \perp \mathbf{C}(A)$ である．

17 ゼロベクトルからなる $\mathbb{R}^3$ の部分空間を $\mathbf{Z}$ とするとき，$\mathbf{Z}^{\perp}$ は $\mathbb{R}^3$ 全体である．$(1,1,1)$ が張る部分空間を $\mathbf{S}$ とするとき，$\mathbf{S}^{\perp}$ は $(1,-1,0)$ と $(1,0,-1)$ が張る平面である．$(1,1,1)$ と $(1,1,-1)$ が張る部分空間を $\mathbf{T}$ とするとき，$\mathbf{S}^{\perp}$ は $(1,-1,0)$ が張る直線である．

18 $\mathbf{S}^{\perp}$ は，与えられた 2 つのベクトルに直交するすべてのベクトルからなる．したがって，$\mathbf{S}^{\perp}$ は $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ の零空間である．$\mathbf{S}$ が部分空間でなくても，$\mathbf{S}^{\perp}$ は**部分空間である**．

19 $\mathbf{L}^{\perp}$ は， $\mathbb{R}^3$ において $\mathbf{L}$ に直交する 2 **次元部分空間**（**平面**）である．また，$(\mathbf{L}^{\perp})^{\perp}$ は，$\mathbf{L}^{\perp}$ に直交する 1 **次元部分空間**（**直線**）である．実際，$(\mathbf{L}^{\perp})^{\perp}$ は $\mathbf{L}$ と等しい．

20 $\mathbf{V}$ が $\mathbb{R}^4$ の空間全体であるとき，$\mathbf{V}^{\perp}$ は**ゼロ**ベクトルのみからなる．さらに，$(\mathbf{V}^{\perp})^{\perp}$ はゼロベクトルに直交するすべてのベクトルからなり，$\mathbb{R}^4$ である．したがって，$(\mathbf{V}^{\perp})^{\perp}$ は $\mathbf{V}$ と等しい．

21 $\mathbf{S}^\perp = \left(A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{の零空間} \right)$ を張るベクトルの一例は，$(-5,0,1,1)$ と $(0,1,-1,0)$ である．

22 超平面 $\mathbf{P}$ に直交する直線 $\mathbf{P}^\perp$ の基底の 1 つは $(1,1,1,1)$ である．$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ の零空間は $\mathbf{P}$ であり，A の行空間は $\mathbf{P}^\perp$ である．

23 $\mathbf{V}^\perp$ に含まれるベクトル $\boldsymbol{x}$ は，$\mathbf{V}$ に含まれるすべてのベクトルに直交する．$\mathbf{S}$ に含まれるベクトルはすべて $\mathbf{V}$ に含まれるので，$\boldsymbol{x}$ は $\mathbf{S}$ に含まれるベクトルすべてに直交する．したがって，$\mathbf{V}^\perp$ に含まれるすべてのベクトル $\boldsymbol{x}$ は，$\mathbf{S}^\perp$ にも含まれる．．

24 $AA^{-1} = I$ のとき，A^{-1} の第 1 列は A の第 2 行，第 3 行，...，第 n 行に直交する．よって，A^{-1} の第 1 列は，それら $n-1$ 個の行が張る空間に直交する．

25 A の列が，互いに直交する単位ベクトルであるとき，$A^{\mathrm{T}}A = I$ となる．これは単純だが重要だ！そのような行列を Q を書く．

26 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$． この例は，列が互いに直交する行列を示している．$(A^{\mathrm{T}}A)_{ij} = (A\text{ の第 } i \text{ 列}) \cdot (A\text{ の第 } j \text{ 列})$ より，$A^{\mathrm{T}}A = 9I$ は**対角行列**である．列が**単位ベクトル**のときには，$A^{\mathrm{T}}A = I$ となる．

27 直線 $3x + y = b_1$ と $6x + 2y = b_2$ は**平行**である．$b_2 = 2b_1$ のとき，2 つの直線は一致する．このとき，(b_1, b_2) はベクトル $\boldsymbol{(-2,1)}$ に直交する．2×2 行列の零空間は直線 $3x + y = \mathbf{0}$ である．零空間に含まれるベクトルの 1 つは $\boldsymbol{(-1,3)}$ である．

28 (a) 両方の平面に $(1,-1,0)$ が含まれる．法線ベクトルは互いに直交するが，平面は共通部分を持つ！$\mathbb{R}^3$ において 2 つの平面が（ベクトル空間の意味で）直交することはありえない．(b) $\mathbb{R}^5$ における直交補空間を張るには，直交するベクトルが **3 つ**必要である．(c) $\mathbb{R}^3$ における 2 つの直線はゼロベクトルで交わるが，直交するとは限らない．

29 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$．$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$． A は $\boldsymbol{v} = (1,2,3)$ を行空間と列空間に含む．B は $\boldsymbol{v}$ を列空間と零空間に含む．$\boldsymbol{v}$ を零空間と行空間に含むことは**あり得ない**．また，$\boldsymbol{v}$ を左零空間と列空間に含むこともあり得ない．それらは直交する部分空間であるが，$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} \neq 0$ より v はそれ自身に直交しないからだ．

30 $AB = O$ のとき，B の各列に A を掛けるとゼロベクトルとなるので，B の列空間は A の零空間に含まれる．したがって，$\mathbf{C}(B)$ の次元は $\mathbf{N}(A)$ の次元以下となる．これより，$\operatorname{rank}(B) \leq 4 - \operatorname{rank}(A)$ である．

31 null(N') により，（$\mathbf{N}(A)$ に直交する）A の**行空間**の基底が求まる．

32 $\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n} = 0$ および $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\ell} = 0$ である必要がある．そのような行列 A は，$a \neq 0$ として $A = a\boldsymbol{c}\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}$ という形で表される．

33 $\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$ の両方が，$\boldsymbol{n}_1$ と $\boldsymbol{n}_2$ の両方に直交する．また，$\boldsymbol{c}_1$ と $\boldsymbol{c}_2$ の両方が，$\boldsymbol{\ell}_1$ と $\boldsymbol{\ell}_2$ の両方に直交する．また，各対（$\boldsymbol{r}_1$ と $\boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{n}_1$ と $\boldsymbol{n}_2$，$\boldsymbol{c}_1$ と $\boldsymbol{c}_2$，および，$\boldsymbol{\ell}_1$ と $\boldsymbol{\ell}_2$）は線形独立でなければならない．事実：そのような行列 A は，2×2 の可逆行列 M を用いて $[\boldsymbol{c}_1\ \boldsymbol{c}_2]\, M\, [\boldsymbol{r}_1\ \boldsymbol{r}_2]^{\mathrm{T}}$ という形で表される．

練習問題 4.2 （174 ページ）

1 (a) $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}/\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = 5/3$．射影 $\boldsymbol{p} = 5\boldsymbol{a}/3 = (5/3, 5/3, 5/3)$．$\boldsymbol{e} = (-2, 1, 1)/3$.

(b) $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}/\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = -1$．射影 $\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{a}$．$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$.

2 (a) $\boldsymbol{a} = (1, 0)$ を通る直線への $\boldsymbol{b} = (\cos\theta, \sin\theta)$ の射影は $\boldsymbol{p} = (\cos\theta, 0)$ である．(b) $\boldsymbol{a} = (1, -1)$ を通る直線への $\boldsymbol{b} = (1, 1)$ の射影は $\boldsymbol{p} = (0, 0)$ である．なぜなら，$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = 0$ だからだ.

(a) の図において，$\boldsymbol{b}$ は水平方向の $\boldsymbol{a}$ に対して角度 θ の方向にある．(b) の図では，ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は $90°$ 度の角をなす.

3 (a) に対応する射影行列は $P_1 = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ であり，$P_1\boldsymbol{b} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ となる．(b) に対応する射影行列は $P_2 = \dfrac{1}{11}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 9 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ であり，$P_2\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる.

4 (a) に対応する射影行列は $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ であり，(b) に対応する射影行列は $P_2 = \dfrac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ である．P_1 は $(1, 0)$ を通る直線へ射影し，P_2 は $(1, -1)$ を通る直線へ射影する．$P_1P_2 \neq O$ と $P_1 + P_2$ は射影行列ではない．$(P_1 + P_2)^2$ は $P_1 + P_2$ と異なる.

5 $P_1 = \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ と $P_2 = \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$．$P_1$ と P_2 は，それぞれ $\boldsymbol{a}_1 = (-1, 2, 2)$ と $\boldsymbol{a}_2 = (2, 2, -1)$ を通る直線への射影行列である．$\boldsymbol{a}_1 \perp \boldsymbol{a}_2$ なので，$P_1P_2 = O$（ゼロ行列）となる.

6 $\boldsymbol{p}_1 = (\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{9})$，$\boldsymbol{p}_2 = (\frac{4}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{2}{9})$，$\boldsymbol{p}_3 = (\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{9})$．よって，$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{b}$.

7 $P_1 + P_2 + P_3 = \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \dfrac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} = I$．直交するベクトルへの射影ベクトルを足して，より大きな空間への射影行列を求めることができる．これは重要だ.

8 $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0)$ を通る直線と $\boldsymbol{a} = (1, 2)$ を通る直線への $\boldsymbol{b} = (1, 1)$ の射影は，それぞれ $\boldsymbol{p}_1 = (1, 0)$ と $\boldsymbol{p}_2 = \frac{3}{5}(1, 2)$ である．このとき，$\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 \neq \boldsymbol{b}$ である．ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が直交しないので，射影の和 $\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2$ は，2 つのベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ が張る空間への射影とはならない.

9 A は可逆行列なので，$P = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$ を $AA^{-1}(A^{\mathrm{T}})^{-1}A^{\mathrm{T}} = I$ と分けて計算することができる．ここで，I は $\mathbb{R}^2$ 全体への射影行列である.

10 $P_2 = \dfrac{\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_2} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$，$P_2\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \end{bmatrix}$，$P_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，$P_1P_2\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \end{bmatrix}$．この $P_1P_2\boldsymbol{a}_1$ は $\boldsymbol{a}_1 = (1, 0)$ に等しくない．$P_1P_2 \neq (P_1P_2)^2$ であり，P_1P_2 は射影行列ではない.

11 (a) $\boldsymbol{p}=A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=(2,3,0)$，$\boldsymbol{e}=(0,0,4)$，$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0}$.

(b) $\boldsymbol{b}$ が A の列空間に含まれるので，$\boldsymbol{p}=(4,4,6)$ と $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0}$ となる．

12 A の列空間（xy 平面）への射影行列は $P_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ である．(b) に対する列空間への射影行列は $P_2=A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0.5&0.5&0\\0.5&0.5&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ である．$P_2^2=P_2$ が成り立ち，P_2 は確かに射影行列である．

13 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$（正方行列），$\boldsymbol{p}=P\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix}$.

14 A の列空間への $\boldsymbol{b}$ の射影は $\boldsymbol{b}$ そのものである．なぜなら，$\boldsymbol{b}$ が列空間に含まれるからだ．しかし，P は I になるとは限らない．後半の問において，$\boldsymbol{b}=2(A$ の第 2 列$)$ であることに注意せよ．

$A=\begin{bmatrix}0&1\\1&2\\2&0\end{bmatrix}$ のとき $P=\dfrac{1}{21}\begin{bmatrix}5&8&-4\\8&17&2\\-4&2&20\end{bmatrix}$ であり，$\boldsymbol{b}=P\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}$ である．

15 $2A$ の列空間は，A の列空間に等しい．よって，射影行列 P は A と $2A$ で同じになる．しかし，$2A$ に対する $\widehat{\boldsymbol{x}}$ は，A に対する $\widehat{\boldsymbol{x}}$ の**半分**になる．

16 $\frac{1}{2}(1,2,-1)+\frac{3}{2}(1,0,1)=(2,1,1)$．これより，$\boldsymbol{b}$ は 2 つのベクトルが張る平面に含まれる．射影を計算すると $P\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$ となる．

17 $P^2=P$ のとき，$\boldsymbol{(I-P)^2}=(I-P)(I-P)=I-PI-IP+P^2=\boldsymbol{I-P}$ となる．A の列空間への射影行列が P であるとき，$I-P$ は **A の左零空間**への射影行列である．

18 (a) $I-P$ は，$(1,1)$ に直交する方向である，$(1,-1)$ を通る直線への射影行列である．(b) $I-P$ は，$(1,1,1)$ に直交する平面 $x+y+z=0$ への射影行列である．

19 平面 $x-y-2z=0$ の任意の基底ベクトルをとる．例えば，$(1,1,0)$ と $(2,0,1)$ とする．射影行列は $P=A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}5/6&1/6&1/3\\1/6&5/6&-1/3\\1/3&-1/3&1/3\end{bmatrix}$ となる．

20 $\boldsymbol{e}=\begin{bmatrix}1\\-1\\-2\end{bmatrix}$，$Q=\dfrac{\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}}=\begin{bmatrix}1/6&-1/6&-1/3\\-1/6&1/6&1/3\\-1/3&1/3&2/3\end{bmatrix}$，$I-Q=\begin{bmatrix}5/6&1/6&1/3\\1/6&5/6&-1/3\\1/3&-1/3&1/3\end{bmatrix}$.

21 $\left(A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\right)^2=A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}(A^{\mathrm{T}}A)(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}=A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$．よって，$P^2=P$ が成り立つ．$P\boldsymbol{b}$ は列空間に含まれる（P による射影）．$P\boldsymbol{b}$ の射影 $P(P\boldsymbol{b})$ は $P\boldsymbol{b}$ で変わらない．

22 $P^{\mathrm{T}} = (A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A((A^{\mathrm{T}}A)^{-1})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}} = P$（$(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$ が対称行列であることを使う）.

23 A が可逆行列であるとき，その列空間は $\mathbb{R}^n$ 全体となる．したがって，$P = I$ であり，$\boldsymbol{e} = \mathbf{0}$ となる．

24 A^{T} の零空間（A の左零空間）は，列空間 $\boldsymbol{C}(A)$ に直交する．したがって，$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$ のとき，$\boldsymbol{C}(A)$ への $\boldsymbol{b}$ の射影は $\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$ となる．このことは，$P\boldsymbol{b} = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}\mathbf{0}$ より確認できる．

25 P の列空間は，P の射影先の空間である．A の列空間は，必ず $A\boldsymbol{x}$ のすべてからなる．したがってこの問題において，$\mathbf{S}$ は $P\boldsymbol{x}$ すべてからなるので，P の列空間である．P のランクは S の次元に等しく n である．

26 ランクが $r = m$ であることから，A^{-1} が存在する．$A^2 = A$ に A^{-1} を掛けると，$A = I$ となる．

27 $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のとき，$A\boldsymbol{x}$ は A^{T} の零空間に含まれる．一方で，$A\boldsymbol{x}$ は A の列空間にも含まれる．これら直交する部分空間の両方に含まれるためには，$A\boldsymbol{x}$ はゼロベクトルでなければならない．よって，A の零空間と $A^{\mathrm{T}}A$ の零空間は等しい．$A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となるのは $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ のとき，かつそのときに限る．

28 $P^2 = P = P^{\mathrm{T}}$ より $P^{\mathrm{T}}P = P$ となる．このとき，P の $(2,2)$ 成分は $P^{\mathrm{T}}P$ の $(2,2)$ 成分に等しい．ここで，$P^{\mathrm{T}}P$ の $(2,2)$ 成分は，P の第 2 列の長さの 2 乗である．

29 $A = B^{\mathrm{T}}$ は線形独立な列からなるので，$A^{\mathrm{T}}A$（すなわち BB^{T}）は可逆である．

30 (a) 列空間は $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ を通る直線であり，したがって，$P_C = \dfrac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}} = \dfrac{1}{25}\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$ である．公式 $P = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$ を用いるには，行列 A の列は線形独立でなければならない．この問題の A の列は線形従属である．

(b) 行空間は $\boldsymbol{v} = (1,2,2)$ を通る直線であり，$P_R = \boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}/\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}$ である．$P_CA = A$（A の列を射影しても変化しない）と $AP_R = A$ は常に成り立つ．したがって，$P_CAP_R = A$ である．

31 判定方法：誤差 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p}$ が，すべての $\boldsymbol{a}_i$ に直交することを調べる．

32 $\dfrac{1}{999}\left(b_1 + \cdots + b_{999}\right)\left(1 - \dfrac{1}{1000}\right) + \dfrac{b_{1000}}{1000} = \left(b_1 + \cdots + b_{999}\right)\left(\dfrac{1}{1000}\right) + \dfrac{b_{1000}}{1000} = \widehat{x}_{1000}$.

33 $P_1P_2 = P_2P_1$ のとき，$P_1P_2P_1P_2 = P_1P_1P_2P_2 = P_1P_2$ が成り立つ．また，$(P_1P_2)^{\mathrm{T}} = P_2^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}} = P_2P_1 = P_1P_2$ も成り立つ．次に，$P_1P_2 \neq P_2P_1$ と仮定する．このとき，上の等式が成り立たない．すなわち，$(P_1P_2)^{\mathrm{T}} \neq P_1P_2$ であり，P_1P_2 は射影行列とならない．

練習問題 4.3 （186 ページ）

1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}$ より，$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{bmatrix}$ および $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 36 \\ 112 \end{bmatrix}$ となる．$A^{\mathrm{T}}A\widehat{\boldsymbol{x}} = A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ を解くと $\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{p} = A\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 13 \\ 17 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$ となる．$E = \|\boldsymbol{e}\|^2 = 44$.

2 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}$．この $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ は解を持たない．$\boldsymbol{b}$ を射影 $\boldsymbol{p} = P\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 13 \\ 17 \end{bmatrix}$ に置き換えると，$\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ は $A\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{p}$ の厳密解である．

3 問題 2 において，$\boldsymbol{p} = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = (1, 5, 13, 17)$ であり，$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p} = (-1, 3, -5, 3)$ となる．この $\boldsymbol{e}$ は，A の 2 つの列の両方に直交する．距離の最小値 $\|\boldsymbol{e}\|$ は $\sqrt{44}$ である．

4 $E = (C + \mathbf{0}D)^2 + (C + \mathbf{1}D - 8)^2 + (C + \mathbf{3}D - 8)^2 + (C + \mathbf{4}D - 20)^2$．ここで，$\partial E/\partial C = 2C + 2(C + D - 8) + 2(C + 3D - 8) + 2(C + 4D - 20) = 0$ および $\partial E/\partial D = 1 \cdot 2(C + D - 8) + 3 \cdot 2(C + 3D - 8) + 4 \cdot 2(C + 4D - 20) = 0$．これら 2 本の等式からも正規方程式 $\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 112 \end{bmatrix}$ を得る．

5 $E = (C - 0)^2 + (C - 8)^2 + (C - 8)^2 + (C - 20)^2$．$A^{\mathrm{T}} = [\,1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1\,]$ より，$A^{\mathrm{T}}A = [\,4\,]$ と $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = [\,36\,]$ であり，$(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = 9$ は最適な水平線の高さ C である．誤差 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p} = (-9, -1, -1, 11)$ の和はこの場合もゼロである．

6 $\boldsymbol{a} = (1, 1, 1, 1)$ と $\boldsymbol{b} = (0, 8, 8, 20)$ より，$\widehat{x} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}/\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = 9$ となり，射影は $\widehat{x}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{p} = (9, 9, 9, 9)$ となる．このとき，確かに $\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = (-9, -1, -1, 11)^{\mathrm{T}}(1, 1, 1, 1) = 0$ であり，$\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{a}$ を通る直線までの距離の最小値は $\|\mathbf{e}\| = \sqrt{204}$ である．

7 この問題では，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ における 4×1 行列 A は $A = [\,0 \;\; 1 \;\; 3 \;\; 4\,]^{\mathrm{T}}$ である．このとき，$A^{\mathrm{T}}A = [\,26\,]$ と $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = [\,112\,]$ となる．最適な直線は $D = 112/26 = 56/13$ である．図は省略．

8 $\widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}/\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = 56/13$，$\boldsymbol{p} = (56/13)(0, 1, 3, 4)$．問題 7–8 の $(C, D) = (9, 56/13)$ は，問題 1–4 の $(C, D) = (1, 4)$ と一致しない．A の列が直交しないので，それぞれの列へ射影して C と D を求めることはできない．

9 放物線のフィッティング $\boldsymbol{b}$ を 4 次元から 3 次元へ射影する $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}$. $A^{\mathrm{T}}A\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 26 \\ 8 & 26 & 92 \\ 26 & 92 & 338 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 112 \\ 400 \end{bmatrix}$.

図 4.8 左は，4 つの点に対して放物線をフィッティングする様子を表している．図 4.8 右は，$\mathbb{R}^4$ における射影を表している．これらは同じ問題だ！

10 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ 20 \end{bmatrix}$. これを解くと，$\begin{bmatrix} C \\ D \\ E \\ F \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 47 \\ -28 \\ 5 \end{bmatrix}$.

3 次関数は点を正確に通るので， $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{b}$ であり，$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$ となる．このヴァンデルモンド行列により，点 $0, 1, 3, 4$ を通る 3 次関数による正確な補間が得られる．

11 (a) 最適な近似直線は $x = 1 + 4t$ であり，時刻の平均 $\widehat{t} = 2$ に対する b_i の平均が $\widehat{\boldsymbol{b}} = 9$ となる．(b) 1 つ目の等式 $Cm + D\sum t_i = \sum b_i$ を m で割ると，$C + D\widehat{t} = \widehat{\boldsymbol{b}}$ となる．これより，最適な近似直線が時刻 $\widehat{t}$ において $\widehat{\boldsymbol{b}}$ を通ることが示される．

12 (a) $\boldsymbol{a} = (1, \ldots, 1)$ のとき，$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a} = m$ および $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = b_1 + \cdots + b_m$ となる．したがって，$\widehat{x} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}/m$ は b_i の**平均**である．

(b) $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \widehat{x}\boldsymbol{a}$ および $\|\boldsymbol{e}\|^2 = (b_1 - (\text{平均}))^2 + \cdots + (b_m - (\text{平均}))^2 = (\text{**分散**})$（分散は $\boldsymbol{\sigma^2}$ で表す）．

(c) $\boldsymbol{p} = (3, 3, 3)$ と $\boldsymbol{e} = (-2, -1, 3)$ であり，$\boldsymbol{p}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} = 0$ となる．射影行列は $P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

13 $(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x}) = \widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}$．この式から，$A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}$ の成分の和がゼロであるとき，$\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}$ の成分の和もゼロである．このことを，$\widehat{\boldsymbol{x}}$ が不偏であると言う．

14 行列 $(\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x})(\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}$ は $(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$ に等しい．ここで，$(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})(\boldsymbol{b} - A\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}$ の平均が $\sigma^2 I$ であるとき，$(\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x})(\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}$ の平均は**出力共分散行列** $(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\sigma^2 A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$ となり，これは $\sigma^2(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$ まで単純化できる．これが，出力の二乗誤差 $\widehat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}$ の平均となる．

15 A が 4 つの 1 からなる列 1 つのみからなるとき，問題 **14** より期待誤差 $(\widehat{x} - x)^2$ は $\sigma^2(A^{\mathrm{T}}A)^{-1} = \sigma^2/4$ となる．m 回の測定を行うと，分散が σ^2 から σ^2/m に減る．

16 $\frac{1}{10}b_{10} + \boldsymbol{\frac{9}{10}}\widehat{x}_9 = \frac{1}{10}(b_1 + \cdots + b_{10})$．$\widehat{x}_9$ が既知のとき，10 個の b_i すべての和を求める必要がない．

17 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 21 \end{bmatrix}$．このとき，$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 42 \end{bmatrix}$ より解 $\widehat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{9} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}$ が求まる．

18 $\boldsymbol{p} = A\widehat{\boldsymbol{x}} = (5, 13, 17)$ は，最良近似直線における高さを与える．垂直方向の誤差は $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p} = (2, -6, 4)$ である．この誤差 $\boldsymbol{e}$ について，$P\boldsymbol{e} = P\boldsymbol{b} - P\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ が成り立つ．

19 $\boldsymbol{b}$ が誤差 $\boldsymbol{e}$ に等しいとき，$\boldsymbol{b}$ は A の列空間に直交する．よって，射影 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$ となる．

20 列 $(1,1,1)$ と $(-1,1,2)$ からなる行列を A とする．$\boldsymbol{b}=A\widehat{\boldsymbol{x}}=(5,13,17)$ のとき，$\widehat{\boldsymbol{x}}=(9,4)$ および $\boldsymbol{e}=\mathbf{0}$ となる．その理由は，$\boldsymbol{b}=9\,(\text{第 1 列})+4\,(\text{第 2 列})$ が A の列空間に含まれるからだ．

21 $\boldsymbol{e}$ は A の左零空間 $\mathbf{N}(A^{\mathrm{T}})$ に含まれる．$\boldsymbol{p}$ は A の列空間 $\mathbf{C}(A)$ に含まれる．$\widehat{\boldsymbol{x}}$ は A の行空間 $\mathbf{C}(A^{\mathrm{T}})$ に含まれる．A の零空間 $\mathbf{N}(A)=\{\mathbf{0}\}$ は，ゼロベクトルのみからなる．

22 最小二乗法の方程式は $\begin{bmatrix}5 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\ D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ -10\end{bmatrix}$ となり，解は $C=1$，$D=-1$ である．よって，最良近似直線は $b=1-t$ である．t_i がゼロに対して対称であるとき，$A^{\mathrm{T}}A$ は対角行列となり，解が容易に求まる．

23 $\mathbb{R}^m$ において，$\boldsymbol{e}$ は $\boldsymbol{p}$ に直交する．このとき，$\|\boldsymbol{e}\|^2=e^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p})=\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}$ が成り立つ．

24 $\|A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$（最後の項が定数であることに注意）は，$2A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}=2A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$（すなわち，$\boldsymbol{x}=(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$）のとき，その偏導関数がゼロとなる．

25 3 つの点がある直線上にあるとき，2 点間の傾きが等しいことから $(b_2-b_1)/(t_2-t_1)=(b_3-b_2)/(t_3-t_2)$ となる．線形代数の言葉を使うと，列 $(1,1,1)$ と (t_1,t_2,t_3) に直交するベクトル $\boldsymbol{y}=(t_2-t_3,t_3-t_1,t_1-t_2)$ は A の左零空間に含まれる．ここで，$\boldsymbol{b}$ は A の列空間に含まれ，$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=0$ は傾きが等しくなる条件 $(b_2-b_1)(t_3-t_2)=(b_3-b_2)(t_2-t_1)$ と等価である．

26 4 頂点に対して $C+Dx+Ey=(0,1,3,4)$ をフィッティングして得られる，解を持たない方程式は $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C\\ D\\ E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$ である．$A^{\mathrm{T}}A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ と $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}8\\ -2\\ -3\end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix}C\\ D\\ E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ -3/2\end{bmatrix}$）．$x,y=0,0$ のとき，最適な平面 $2-x-\frac{3}{2}y$ は $C=2=(\{0,1,3,4\}$ の平均$)$ を通る．

27 3 次元空間において，2 直線を結ぶ最短の線分は，それら 2 直線に直交する．

28 A の列が線形独立でないとき，$A^{\mathrm{T}}A$ が可逆行列とならず，いつもの射影の式 $P=A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$ が破綻する．その場合，上の式における A を，A のピボット列のみからなる行列 B で置き換える．

29 $\mathbf{0},\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ を含む平面は，$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ が線形従属の場合を除き，ただ一つ存在する．$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{n-1}$ に対しても同じように判定できる．$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{n-1}$ が線形独立であるとき，$\boldsymbol{a}_i$ のすべてに直交するベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在する．このとき，$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{n-1}$（および $\mathbf{0}$）はすべて，$\boldsymbol{x}=(0,0,\ldots,0)$ を通る（超）平面 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$ 上にある．

30 A が直交する 2 つの列ベクトル $(1,\ldots,1)$ と $(T_1,\ldots,T_m)$ からなるとき，行列 $A^{\mathrm{T}}A$ は対角成分が m と $T_1^2+\cdots+T_m^2$ である対角行列となる．また，$A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ は 2 つの成分 $b_1+\cdots+b_m$ と $T_1b_1+\cdots+T_mb_m$ からなる．この対角行列 $A^{\mathrm{T}}A$ からなる方程式を解くと，最良近似直線の解 $\widehat{\boldsymbol{x}}=(C,D)$ が得られる．

練習問題 4.4（200 ページ）

1 (a) 線形独立であるだけ．(b) 直交するが線形独立ではない．(c) 正規直交である．

正規直交なベクトルとするには，(a) では $(1,0),(0,1)$ とし，(b) では $(0.6,0.8),(0.8,-0.6)$ とする．

2 それぞれのベクトルを長さ 3 で割る．$\boldsymbol{q}_1=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$ と $\boldsymbol{q}_2=(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$． $Q^{\mathrm{T}}Q=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ に対し，$QQ^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}5/9&2/9&-4/9\\2/9&8/9&2/9\\-4/9&2/9&5/9\end{bmatrix}$．

3 (a) $A^{\mathrm{T}}A$ は $16I$ である．(b) $A^{\mathrm{T}}A$ は，$1^2,2^2,3^2$ すなわち $1,4,9$ を対角成分に持つ対角行列である．

4 (a) $Q=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$ のとき $QQ^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\neq I$ である．$n<m$ を満たす任意の Q について，$QQ^{\mathrm{T}}\neq I$ が成り立つ． (b) $(1,0)$ と $(0,0)$ は**直交であるが，線形独立ではない**．直交する非ゼロベクトルは線形独立**である**． (c) $\boldsymbol{q}_1=(1,1,1)/\sqrt{3}$ を含む正規直交基底のうち私が好きなのは $\boldsymbol{q}_2=(1,-1,0)/\sqrt{2}$ と $\boldsymbol{q}_3=(1,1,-2)/\sqrt{6}$ との組である．

5 **直交する**ベクトルの対は $(1,-1,0)$ と $(1,1,-1)$ である．それぞれ長さで割ると**正規直交**する $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ と $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ が得られる．

6 $(Q_1Q_2)^{\mathrm{T}}Q_1Q_2=Q_2^{\mathrm{T}}Q_1^{\mathrm{T}}Q_1Q_2=Q_2^{\mathrm{T}}Q_2=I$ より，Q_1Q_2 は直交行列である．$(Q_1Q_1)^{-1}=Q_2^{-1}Q_1^{-1}=Q_2^{\mathrm{T}}Q_1^{\mathrm{T}}=(Q_1Q_2)^{\mathrm{T}}$ であることから示すこともできる．

7 グラム・シュミット直交化により正規直交な列からなる行列 Q を得たとき，$Q^{\mathrm{T}}Q\widehat{\boldsymbol{x}}=Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ は $\widehat{\boldsymbol{x}}=Q^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$ となる．ごく簡単に（Q^{T} を掛けるだけで）正規方程式を解くことができる．

8 $\boldsymbol{q}_1$ と $\boldsymbol{q}_2$ が $\mathbb{R}^5$ における**正規直交な**ベクトルの対であるとき，$\boldsymbol{b}$ に最も近いベクトルは $\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})\boldsymbol{q}_1+(\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})\boldsymbol{q}_2$ である．このとき，誤差 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}$ は $\boldsymbol{q}_1$ と $\boldsymbol{q}_2$ に直交する．

9 (a) $Q=\begin{bmatrix}0.8&-0.6\\0.6&0.8\\0&0\end{bmatrix}$ のとき，$P=QQ^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ は xy 平面への射影行列である．

(b) $(QQ^{\mathrm{T}})(QQ^{\mathrm{T}})=Q(Q^{\mathrm{T}}Q)Q^{\mathrm{T}}=QQ^{\mathrm{T}}$．

10 (a) $\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3$ が**正規直交**であるとき，$c_1\boldsymbol{q}_1+c_2\boldsymbol{q}_2+c_3\boldsymbol{q}_3=\boldsymbol{0}$ の両辺と $\boldsymbol{q}_1$ との内積から $c_1=0$ となる．同様にして $c_2=c_3=0$ が言える．これより，$\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3$ が**線形独立**であると証明される．

(b) $Q\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ より $Q^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が導け，これより $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が言える．

11 **正規直交**な 2 つのベクトルは $\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{10}(1,3,4,5,7)$ と $\boldsymbol{q}_2=\frac{1}{10}(-7,3,4,-5,1)$ である．$(1,0,0,0,0)$ に最も近いベクトルは**射影** $QQ^{\mathrm{T}}(1,0,0,0,0)=(0.5,-0.18,-0.24,0.4,0)$ である．

12 (a) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ が正規直交であるとき，$\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}(x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3)=x_1(\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1)=x_1$．

(b) $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ が互いに直交するとき，$\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}(x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+x_3\boldsymbol{a}_3)=x_1(\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1)$．したがって，$x_1=\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}/\boldsymbol{a}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_1$．

(c) x_1 は $A^{-1}\boldsymbol{b}$ の第 1 成分である（A は 3×3 の可逆行列である）．

13 $\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{a}$ の $\frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}$ 倍を引く．すると，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{b}-\frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$ となる．図は省略．

14 $\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 & \boldsymbol{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\|\boldsymbol{a}\| & \boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\\ 0 & \|\boldsymbol{B}\|\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 2\sqrt{2}\\ 0 & 2\sqrt{2}\end{bmatrix} = QR.$

15 グラム・シュミット直交化より $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{a}/||\boldsymbol{a}|| = \boldsymbol{\frac{1}{3}}(1,2,-2)$ と $\boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{3}(2,1,2)$ が得られる．さらに，$\boldsymbol{q}_3 = \frac{1}{3}(2,-2,-1)$ となる．$\boldsymbol{q}_3$ が含まれるのは A の左零空間である．最小二乗解は $\widehat{\boldsymbol{x}} = (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}(1,2,7) = (1,2)$ である．

16 $\boldsymbol{b}$ に最も近いのは，$\boldsymbol{a}$ を通る直線への $\boldsymbol{b}$ の射影であり，$\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}/\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = 14\boldsymbol{a}/49 = 2\boldsymbol{a}/7$ である．$\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{a}/\|\boldsymbol{a}\| = \boldsymbol{a}/7$ を計算すると $(4,5,2,2)/7$ となる．$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p} = (-1,4,-4,-4)/7$ の長さは $\|\boldsymbol{B}\| = 1$ なので，$\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{B}$ である．

17 $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}/\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})\boldsymbol{a} = (3,3,3)$ および $\boldsymbol{e} = (-2,0,2)$ である．グラム・シュミットの直交化では，正規直交なベクトル $\boldsymbol{q}_1 = (1,1,1)/\sqrt{3}$ と $\boldsymbol{q}_2 = (-1,0,1)/\sqrt{2}$ を得る．

18 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a} = (1,-1,0,0)$．$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p} = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1,0)$（ここで $\boldsymbol{p} = \dfrac{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}$）．$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{p}_A - \boldsymbol{p}_B = (\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},-1)$（ここで $\boldsymbol{p}_A = \dfrac{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{p}_B = \dfrac{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}$）．互いに直交するベクトル $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ に成り立つパターンに注目しよう．$\mathbb{R}^5$ において，続くベクトル $\boldsymbol{D}$ は $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},-1)$ となるだろう．グラム・シュミット直交化では，さらに正規化を行って $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{A}/||\boldsymbol{A}||, \boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{B}/||\boldsymbol{B}||, \boldsymbol{q}_3 = \boldsymbol{C}/||\boldsymbol{C}||$ を求める．

19 $A = QR$ のとき，$A^{\mathrm{T}}A = R^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}}QR = R^{\mathrm{T}}R =$ (下三角行列)(上三角行列) である（$A^{\mathrm{T}}A$ のコレスキー分解と，A のグラム・シュミット直交化で同じ R が現れる！）．

例では，$A = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 3\\ 0 & 3\end{bmatrix} = QR$ と $A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix}9 & 9\\ 9 & 18\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 0\\ 3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 3\\ 0 & 3\end{bmatrix} =$ $R^{\mathrm{T}}R$ となり，同じ R が現れる．

20 正規直交するベクトルは $\boldsymbol{q}_1 = (1,1,1,1)/2$ と $\boldsymbol{q}_2 = (-5,-1,1,5)/\sqrt{52}$ である．$\boldsymbol{b} = (-4,-3,3,0)$ を列空間へ射影すると $\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})\boldsymbol{q}_1 + (\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b})\boldsymbol{q}_2 = (-7,-3,-1,3)/2$ となる．このとき，$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{p} = (-1,-3,7,-3)/2$ は $\boldsymbol{q}_1$ と $\boldsymbol{q}_2$ の両方に直交する．

21 $\boldsymbol{A} = (1,1,2)$，$\boldsymbol{B} = (1,-1,0)$，$\boldsymbol{C} = (-1,-1,1)$．これらは単位ベクトルにはなっていない．グラム・シュミット直交化では，それぞれ $||\boldsymbol{A}|| = \sqrt{6}$，$||\boldsymbol{B}|| = \sqrt{2}$，$||\boldsymbol{C}|| = \sqrt{3}$ で割る．

22 $\boldsymbol{q}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{q}_2 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{q}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ である．また，$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix} = QR$．$\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ が, このようになる理由が分かっただろうか．この行列 Q は置換行列であり，確かに直交行列である．

23 $(\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^*)\boldsymbol{q}_2 = \dfrac{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}$ が成り立つ．なぜなら，$\boldsymbol{q}_2 = \dfrac{\boldsymbol{B}}{\|\boldsymbol{B}\|}$ であり，$\boldsymbol{C}^*$ に含まれる $\boldsymbol{q}_1$ は $\boldsymbol{q}_2$ に直交するからだ．

24 $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交でないとき，それぞれを通る直線への射影の和は，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が張る平面への射影に等しくならない．直線への射影を足してもよいのは，直交する $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$（または，正規直交する $\boldsymbol{q}_1$ と $\boldsymbol{q}_2$）を用いた場合だけだ．

25 R_{ij} を求めるのに $\frac{1}{2}m^2n$ 回の積を計算し，$\boldsymbol{v}$ を求めるのにも $\frac{1}{2}m^2n$ 回の積を計算する．

26 $\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{3}(2,2,-1)$，$\boldsymbol{q}_2=\frac{1}{3}(2,-1,2)$，$\boldsymbol{q}_3=\frac{1}{3}(1,-2,-2)$.

27 $Q_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ は x 軸に対して鏡映する．$Q_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$ は，平面 $y+z=0$ に対して鏡映する．図は省略.

28 直交行列かつ下三角行列である行列は，対角成分が ±1 でそれ以外がすべて 0 の対角行列である.

29 (a) $Q\boldsymbol{u}=(I-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$．$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=1$ のとき，右辺は $-\boldsymbol{u}$ となる.

(b) $\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=0$ のとき，$Q\boldsymbol{v}=(I-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$.

30 $\boldsymbol{A}=(1,-1,0,0)$ から始めて，直交なベクトル（正規直交ではない）は $\boldsymbol{B}=(1,1,-2,0)$，$\boldsymbol{C}=(1,1,1,-3)$，$\boldsymbol{D}=(1,1,1,1)$ と求まる．それぞれ長さで割ると，$\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3,\boldsymbol{q}_4$ が得られる．列が互いに直交し成分が整数であるような 4×4 行列と 5×5 行列を以下に示す（直交行列でないので，行は直交しない）.

$$\begin{bmatrix} & & & \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \\ & & & \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 1\end{bmatrix} \text{ および } \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -3 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1\end{bmatrix}$$

31 $[Q,R]=\boldsymbol{qr}(A)$ とすると,（ランクが r である $m\times n$ 行列） A から,「フルサイズの」（$m\times m$ の）正方行列 $Q=[\,Q_1\;\;Q_2\,]$ と $\begin{bmatrix}R\\ 0\end{bmatrix}$ ができる．Q_1 の列は，グラム・シュミットの直交化で得られる，A の列空間の正規直交基底である．Q_2 の $m-n$ 個の列は，A の左零空間の正規直交基底である．それらを合わせた $Q=[\,Q_1\;\;Q_2\,]$ の列は，$\mathbb{R}^m$ の正規直交基底である.

32 この問題では，グラム・シュミットの直交化において，列 $\boldsymbol{q}_1,\ldots,\boldsymbol{q}_n$ からなる行列 Q を用いて（それら $\boldsymbol{q}_i$ を個別に扱わずに）次の $\boldsymbol{q}_{n+1}$ を求める．$\boldsymbol{a}$ から始めて，すでに求めた $\boldsymbol{q}_i$ への $\boldsymbol{a}$ の射影 $\boldsymbol{p}=QQ^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$ を引き，$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{a}-QQ^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$ をその長さで割ると，$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_{n+1}=\boldsymbol{e}/\|\boldsymbol{e}\|$ が得られる.