アーベルの連続性定理

拙著『ε-δ 論法と数学の基礎』の p. 177 において，アーベルの連続性定理を利用してライプニッツ級数の和が $\pi/4$ であることを導きましたが，紙数の関係でアーベルの連続性定理の証明は述べられませんでした．多くの微分積分学のテキストにはその証明がありますが，拙著への補遺としてここに証明を記しておきます．この証明には ε-δ 論法が有効な働きを示していますが，対比の意味で，「限りなく近付く」という直観レベルでどれほど迫れるかを考えてみるのもよいと思います．

始めに次のことを念のために注意しておきます．

補題 1. a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を実数として，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束しているとする．このとき $|x| < 1$ を満たす実数 x に対して $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は絶対収束する．

証明. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束しているので，$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ となり，したがって数列 $\{a_n\}_n$ は有界である．すなわちある定数 M で，任意の n に対して $|a_n| \leq M$ を満たすものが取れる．このとき $|x| < 1$ ならば

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \leq M \sum_{n=0}^{\infty} |x|^n = \frac{M}{1-|x|} < \infty$$

なので $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ が $|x| < 1$ のとき絶対収束することが示された． □

注意 2. a_n が複素数でも同様であることは明らか．

この補題により次の定理が意味を持つことが分かります．

定理 3 (アーベルの定理)**.** a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を実数として，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が収束しているならば，$|x| < 1$ に対して定まる関数

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

に対して（注：仮定より $x = 1$ についても $f(1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が定まる），

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (= f(1)) \tag{1}$$

が成り立つ．（注：上式左辺の極限は左極限を表す．）

証明. 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ の和を A とする．目標は

$$0 = \lim_{x\to 1-0} f(x) - A \tag{2}$$

を示すことであるが，実は $A = 0$ の場合に帰着される．実際，$\tilde{a}_0 := a_0 - A$, $\tilde{a}_n = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とすると $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n = 0$ で，$\tilde{f}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^n$ と置けば $\tilde{f}(x) = f(x) - A$ となるので

$$\lim_{x\to 1-0} \tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n = 0$$

が示されれば (2) が証明される．

いちいち $\tilde{a}_n$ とか $\tilde{f}$ と書くのは煩わしいので，以下では始めから $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ であると仮定しておく．このとき，$n \geq 0$ に対して $s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$，$s_{-1} := 0$ と置くと，$a_n = s_n - s_{n-1}$ $(n \geq 0)$ で $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ が成り立つことに注意しておく．

さて，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ の下で示すべきことは，

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在し，$|x-1| < \delta$ を満たす任意の $x \in (0,1)$ に対して $|f(x)| < \varepsilon$ が成り立つ． (3)

という主張である．以下ではこの主張の証明を，整えた順序ではなく，どのようにして証明を探索していくのかという，数学の活動の実際に即した形で述べていく．結果を整えるのは容易であろう．

まず $0 < x < 1$ のとき $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ という無限和の各項は $x \to 1-0$ のとき a_n に近付くので，単純に考えると $f(x)$ は $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$ に近づきそうであるが，無限個の和なのでそうは言い切れない．そこで和を最初のほうの有限個とその他に分けてみる：

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{n_0} a_n x^n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n x^n \equiv \text{(I)} + \text{(II)} \tag{4}$$

まだ n_0 を決めていないが，とにかく $x \to 1-0$ のとき (I) は s_{n_0} に近付く．そして，$\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ だから，任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対して n_0 を

$$n \geq n_0 \text{ ならば } |s_n| < \varepsilon \tag{5}$$

となるように取れるから，以下では n_0 はこの条件を満たすものとする．実際は，この決め方では荒すぎて最終的に (3) の形とはずれてしまうが，とにかく ε を「小さい量」の指標という感じで使ってみるのである（下の注も参照）．ここで x が十分 1 に近いと (I) と s_{n_0} の差が ε より小となり，$|\text{(I)}| < 2\varepsilon$ となることが期待できるが，x をどのくらい 1 に近づければよいかのチェックは後回しにして，とりあえず (II) の評価に進もう．

(II) の評価については，部分和に対して「アーベルの変形法」と呼ばれる技巧を用いて，x によらない評価が得られることを示す．N を $N > n_0 + 1$ なる自然数とすると，

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_0+1}^{N} a_n x^n &= \sum_{n=n_0+1}^{N} (s_n - s_{n-1}) x^n \\ &= \sum_{n=n_0+1}^{N-1} s_n (x^n - x^{n+1}) - s_{n_0} x^{n_0+1} + s_N x^N \end{aligned} \tag{6}$$

と変形される．そして $n \geq n_0$ に対して $|s_n| < \varepsilon$ だったから，任意の $0 < x < 1$ に対して

$$\left| \sum_{n=n_0+1}^{N-1} s_n (x^n - x^{n+1}) \right| \leq \varepsilon \cdot \sum_{n=n_0+1}^{N-1} (x^n - x^{n+1}) = \varepsilon (x^{n_0+1} - x^N) < \varepsilon$$

が成り立つ．(6) 中の $s_{n_0} x^{n_0+1}$, $s_N x^N$ についてもそれぞれ絶対値は ε より小となるから，(6) において $N \to \infty$ とすれば，任意の $x \in (0,1)$ について

$$|\text{(II)}| = \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n x^n \right| \leq 3\varepsilon \tag{7}$$

が成り立つことが示される．

(II) については，n_0 が (5) を満たしていれば $x \in (0,1)$ に関わりなく $|(\mathrm{II})| < 3\varepsilon$ であることが分かったので，(I) に戻ろう．

$$|(\mathrm{I}) - s_{n_0}| = \left|\sum_{n=0}^{n_0} a_n(1-x^n)\right| \tag{8}$$

であるが，まず $\{a_n\}_n$ は有界なのである定数 M があって，任意の n に対して $|a_n| \leq M$ となることに注意する．そして $0 < x < 1$ のとき

$$0 < 1 - x^n = (1-x)(1 + x + \cdots + x^{n-1}) < n(1-x)$$

なので (8) より

$$|(\mathrm{I}) - s_{n_0}| \leq M(1-x)\sum_{n=0}^{n_0} n = M(1-x) \cdot \frac{n_0(n_0+1)}{2} \tag{9}$$

となる．よって，$\delta > 0$ を

$$\delta < \frac{2\varepsilon}{Mn_0(n_0+1)} \tag{10}$$

に選べば，

$$0 < x < 1 \text{ かつ } |x-1| < \delta \text{ ならば } |(\mathrm{I}) - s_{n_0}| < \varepsilon$$

となり，結局

$$0 < x < 1 \text{ かつ } |x-1| < \delta \text{ ならば } |(\mathrm{I})| < |s_{n_0}| + \varepsilon < 2\varepsilon \tag{11}$$

が得られる．

以上により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して n_0 を (5) を満たすように取り，さらにそれらに対して $\delta > 0$ を (10) を満たすように取れば（これらは可能），$f(x) = (\mathrm{I}) + (\mathrm{II})$ に対して

$$0 < x < 1 \text{ かつ } |x-1| < \delta \text{ ならば } |f(x)| < 5\varepsilon$$

が示される．5ε も任意に小に出来るのでこれは実質的に (3) を示しているが，文字通りに (3) を得るためには，(5) 式以下 (11) 式までで ε となっているところを $\varepsilon/5$ に直せばよい． □

注意 4. 上の証明ではとりあえず「小さい量」の指標として共通に ε を用いたが，さらに複雑な場合には場面毎に小さい量の指標を ε_1, ε_2, ... として導入し，目標である量が ε より小さくなるように $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ を調整することになる．

注意 5. 別の見方：アーベルの連続性定理の上記の証明は，関数列の一様収束という見地から見直すこともできる．実際，$n \in \mathbb{N}$ に対して閉区間 $[0,1]$ 上の関数 $f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ を考えると，$\varepsilon > 0$ に対して (5) で定めた n_0 に対して，不等式 (7) は $x \in [0,1]$ でも成り立つので，

$$\sup\{\, |f(x) - f_{n_0}(x)| \,;\, x \in [0,1] \,\} \leq 3\varepsilon$$

が分かる（$f(x)$ も $[0,1]$ で自然に意味を持つ）．この不等式の証明で用いられているのは $x \in [0,1]$ の他には (5) という仮定だけなので，実は

$$\text{任意の } n \geq n_0 \text{ に対して } \sup\{\, |f(x) - f_n(x)| \,;\, x \in [0,1] \,\} \leq 3\varepsilon$$

ということが示されており，$\varepsilon > 0$ が任意でそれに対して n_0 が定まっていたので，これは関数列 f_n が $[0,1]$ 上で f に一様収束することを意味する．よって連続関数列 f_n の一様収束極限として f も $[0,1]$ で連続（拙著本文の定理 3.78）である．そして特に $x=1$ での $f(x)$ の連続性はアーベルの連続性定理の主張そのものである．