いちばんやさしい
AI・データサイエンスのための数学入門

第0章　準備

0.1　計算

例題 0-1　計算の優先順位を確認する

計算は前（左）から順番におこなうという原則があるが，そのまえに，次のきまりを優先する．

例題 0-1　計算の優先順位を確認する

計算は前（左）から順番におこなうという原則があるが，そのまえに，次のきまりを優先する．

四則演算（$+$，$-$，$\times$，$\div$）の優先順位

1. $(\quad)$ のなか
2. 累乗（$\square^2$，$\square^3$ など）
3. $\times$，$\div$
4. $+$，$-$

例題 0-1　計算の優先順位を確認する

(1) $1 + 2 \times 3 = 1 + 6 = 7$

例題 0-1　計算の優先順位を確認する

(1) $1 + 2 \times 3 = 1 + 6 = 7$

(2) $(1 + 2) \times 3 = 3 \times 3 = 9$

例題 0-1　計算の優先順位を確認する

(3) $80 \div 16 \div 2^3 = 80 \div 16 \div 8 = 5 \div 8 = \dfrac{5}{8}$

例題 0-1　計算の優先順位を確認する

(3) $80 \div 16 \div 2^3 = 80 \div 16 \div 8 = 5 \div 8 = \dfrac{5}{8}$

(4) $80 \div (16 \div 2^3) = 80 \div (16 \div 8) = 80 \div 2 = 40$

例題 0-1　計算の優先順位を確認する

(5) $9 \div (-3) \times (-3) = -3 \times (-3) = 9$

例題 0-1　計算の優先順位を確認する

(5) $9 \div (-3) \times (-3) = -3 \times (-3) = 9$

(6) $9 \div (-3)^2 = 9 \div 9 = 1$

例題 0-1　計算の優先順位を確認する

(5) $9 \div (-3) \times (-3) = -3 \times (-3) = 9$

(6) $9 \div (-3)^2 = 9 \div 9 = 1$

(7) $9 \div (-3) \div (-3) = -3 \div (-3) = 1$

例題 0-2　分数の計算をする

(1) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{6} - \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{6}$

例題 0-2　分数の計算をする

(1) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{3}{6} - \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{6}$

(2) $\dfrac{\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{3}}{2} = \dfrac{\dfrac{3}{30} + \dfrac{10}{30}}{2} = \dfrac{\dfrac{13}{30}}{2}$

$=$ 分母，分子にそれぞれ 30 をかけると $\dfrac{13}{60}$

例題 0-2　分数の計算をする

(3) $$\frac{5}{\frac{3}{8}-\frac{1}{6}} = \frac{5}{\frac{9}{24}-\frac{4}{24}} = \frac{5}{\frac{5}{24}}$$

$$\underset{\text{分母，分子にそれぞれ }24\text{ をかけると}}{=} \frac{5\times 24}{5} = 24$$

例題 0-3　平方根の計算をする

$\sqrt{100}$ は「100 の正の平方根」つまり「2 個かけあわせると 100 になる正の実数」である．

例題 0-3　平方根の計算をする

$\sqrt{100}$ は「100 の正の平方根」つまり「2 個かけあわせると 100 になる正の実数」である．

$$\sqrt{100} = \sqrt{10 \times 10} = 10$$

例題 0-3　平方根の計算をする

$\sqrt[3]{1000}$ は「1000 の正の 3 乗根」つまり「3 個かけあわせると 1000 になる正の実数」である．

例題 0-3　平方根の計算をする

$\sqrt[3]{1000}$ は「1000 の正の 3 乗根」つまり「3 個かけあわせると 1000 になる正の実数」である．

$$\sqrt[3]{1000} = \sqrt[3]{10 \times 10 \times 10} = 10$$

例題 0-3　平方根の計算をする

$\sqrt{10}$ は 2 個かけ合わせると 10 になる．

例題 0-3　平方根の計算をする

$\sqrt{10}$ は 2 個かけ合わせると 10 になる．

$$\sqrt{10}^2 = \sqrt{10} \times \sqrt{10} = 10$$

例題 0-3　平方根の計算をする

$\sqrt{10}$ は 2 個かけ合わせると 10 になる．

$$\sqrt{10}^2 = \sqrt{10} \times \sqrt{10} = 10$$

$\sqrt[3]{10}$ は 3 個かけ合わせると 10 になる．

例題 0-3　平方根の計算をする

$\sqrt{10}$ は 2 個かけ合わせると 10 になる．

$$\sqrt{10}^2 = \sqrt{10} \times \sqrt{10} = 10$$

$\sqrt[3]{10}$ は 3 個かけ合わせると 10 になる．

$$\sqrt[3]{10}^3 = \sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{10} = 10$$

例題 0-3　平方根の計算をする

(1) $(3\sqrt{7})^2 = 3\sqrt{7} \times 3\sqrt{7} = (3 \times 3) \times (\sqrt{7} \times \sqrt{7}) = 9 \times 7 = 63$

注意： $3\sqrt{7}$ は，$3 \times \sqrt{7}$ のことである．

例題 0-3　平方根の計算をする

(1) $(3\sqrt{7})^2 = 3\sqrt{7} \times 3\sqrt{7} = (3 \times 3) \times (\sqrt{7} \times \sqrt{7}) = 9 \times 7 = 63$

注意： $3\sqrt{7}$ は，$3 \times \sqrt{7}$ のことである．

(2) $\sqrt{2 \times 32} = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \sqrt{8 \times 8} = 8$

例題 0-3　平方根の計算をする

(3) $\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(1+3)\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

注意： $3\sqrt{2}$ は，$3\times\sqrt{2}$，つまり，$\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}$ のことである．
よって，$\sqrt{2}+3\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}$ となる．

例題 0-3　平方根の計算をする

(4) $$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1 \times 1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \times \frac{1 \times 1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

0.2　展開と因数分解

例題 0-4　展開する

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{(x+y)^2} &= \boxed{(x+y)}(x+y) \\
&= \boxed{(x+y)}x + \boxed{(x+y)}y \\
&= x^2 + yx + xy + y^2 \\
&= \boldsymbol{x^2 + 2xy + y^2}
\end{aligned}$$

例題 0-4　展開する

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{(x+y)(x-y)} &= \boxed{(x+y)}\,(x+(-y)) \\
&= \boxed{(x+y)}\,x + \boxed{(x+y)}\,(-y) \\
&= x^2 + yx - xy - y^2 \\
&\boldsymbol{= x^2 - y^2}
\end{aligned}
$$

例題 0-4　展開する

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{(x+a)(x+b)} &= \boxed{(x+a)}(x+b) \\
&= \boxed{(x+a)}x + \boxed{(x+a)}b \\
&= x^2 + ax + xb + ab \\
&\boldsymbol{= x^2 + (a+b)x + ab}
\end{aligned}
$$

例題 0-4　展開する

$\boxed{\boldsymbol{(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2}\ \textbf{を使う}}$

(1) $(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

例題 0-4　展開する

$\boxed{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})^2=\boldsymbol{x}^2+2\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}^2 \text{ を使う}}$

(1) $(x+3)^2=x^2+2\times x\times 3+3^2=x^2+6x+9$

(2) $(5x-4)^2=(5x)^2+2\times 5x\times(-4)+(-4)^2=25x^2-40x+16$

例題 0-4　展開する

$\boxed{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2 \text{ を使う}}$

(3) $(x+9)(x-9)=x^2-9^2=x^2-81$

例題 0-4　展開する

$$\boxed{(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{x}^2 + (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{ab} \text{ を使う}}$$

(4) $(x+7)(x-5) = x^2 + (7-5)x + 7 \times (-5) = x^2 + 2x - 35$

例題 0-5　因数分解する

因数分解公式

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

例題 0-5　因数分解する

$\boxed{\boldsymbol{x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2} \text{ を使う}}$

(1) $x^2 + 14x + 49 = x^2 + 2 \times x \times 7 + 7^2 = (x+7)^2$

例題 0-5　因数分解する

$\boxed{\boldsymbol{x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)} \text{ を使う}}$

(2) $x^2 - 25 = x^2 - 5^2 = (x+5)(x-5)$

例題 0-5　因数分解する

$\boxed{\boldsymbol{x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)} \text{ を使う}}$

(3) $x^2 + 11x + 30 = x^2 + (5+6)x + 5 \times 6 = (x+5)(x+6)$

例題 0-5　因数分解する

$\boxed{\boldsymbol{x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)} \text{ を使う}}$

(3) $x^2 + 11x + 30 = x^2 + (5+6)x + 5 \times 6 = (x+5)(x+6)$

(4) $x^2 - 9x + 14 = x^2 + (-2-7) + (-2) \times (-7) = (x-2)(x-7)$

0.3　方程式

例題 0-6　1 次方程式を解く

たとえば，

$$2x + 1 = 7$$

のような，未知数の変数（x など）を含む等式を方程式という．

例題 0-6　1 次方程式を解く

たとえば，

$$2x + 1 = 7$$

のような，未知数の変数（x など）を含む等式を方程式という．

この x を特定の値で置きかえることを代入といい，代入して等式が成立するような値のことを方程式の解という．

例題 0-6　1 次方程式を解く

たとえば，

$$2x + 1 = 7$$

のような，未知数の変数（x など）を含む等式を方程式という．

この x を特定の値で置きかえることを代入といい，代入して等式が成立するような値のことを方程式の解という．

方程式の解をすべて求めることを方程式を解くという．

例題 0-6　1 次方程式を解く

方程式

$$2x + 1 = 7$$

については，x に 3 を代入すると，

$$2 \times 3 + 1 = 7$$

となり，等式が成立する．

例題 0-6　1 次方程式を解く

方程式

$$2x + 1 = 7$$

については，x に 3 を代入すると，

$$2 \times 3 + 1 = 7$$

となり，等式が成立する．そして，3 以外の値を代入しても等式は成立しない．

例題 0-6　1 次方程式を解く

方程式

$$2x + 1 = 7$$

については，x に 3 を代入すると，

$$2 \times 3 + 1 = 7$$

となり，等式が成立する．そして，3 以外の値を代入しても等式は成立しない．よって，この方程式の解は $x = 3$ である．

例題 0-6　1 次方程式を解く

この方程式を解くには，両辺それぞれに，同じ数をたしたりかけたりなどして，$x = \square$ の形にもっていく：

例題 0-6　1 次方程式を解く

この方程式を解くには，両辺それぞれに，同じ数をたしたりかけたりなどして，$x = \square$ の形にもっていく：

$$2x + 1 = 7$$

の両辺から 1 をひくと，$2x + 1 - 1 = 7 - 1$，つまり，$2x = 6$ となる．

そして，この両辺を 2 で割ると，$x = 3$ となる．

例題 0-6　1 次方程式を解く

(1) $10x - 3 = 1 + 2x$

両辺に 3 をたすと，$10x = 4 + 2x$ となる．

さらに，この両辺から $2x$ をひくと，$8x = 4$ となる．

そして，この両辺を 8 で割ると，$x = \dfrac{4}{8}$，つまり，$x = \dfrac{1}{2}$ となる．

例題 0-6　1 次方程式を解く

(2) $\dfrac{1}{2}x - 3 = \dfrac{2}{3}x$

両辺に 6 をかけると，$3x - 18 = 4x$ となる．

さらに，この両辺から $3x$ をひくと，$-18 = x$，つまり，$x = -18$ となる．

例題 0-6　1 次方程式を解く

(3) $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{x-5}{2}$

両辺に 10 をかけると，$2(x+1) = 5(x-5)$.

これは，$2x+2 = 5x-25$ となり，この両辺から $2x$ をひくと，$2 = 3x - 25$ となり，さらに両辺に 25 をたすと，$27 = 3x$ となる.

そして，この両辺を 3 で割ると，$3 = x$，つまり，$x = 3$ となる.

例題 0-7　連立 1 次方程式を解く

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

のような，複数個の未知数の変数（x, y など）を含む複数個の等式の組を連立方程式という．

例題 0-7　連立 1 次方程式を解く

この連立方程式は次のように解くことができる：

例題 0-7　連立 1 次方程式を解く

この連立方程式は次のように解くことができる：

上の式と下の式の「左辺どうしをたしたもの」と「右辺どうしをたしたもの」は等しくなることより，

$$3x = 18$$

となり，$x = 6$ である．これを下の式（$x - y = 7$）に代入すると，

$$6 - y = 7$$

となり，$y = -1$ となる．

例題 0-7　連立 1 次方程式を解く

[別解]　下の式（$x-y=7$）から $y=x-7$ となる．
これを上の式（$2x+y=11$）に代入し，

$$2x+(x-7)=11$$

を解くことにより $x=6$ を求めてもいい．

例題 0-7　連立 1 次方程式を解く

(1)

$$\begin{cases} x + 3y = 10 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

上の式と下の式の「左辺どうしをひいたもの」と「右辺どうしをひいたもの」は等しくなることより，

$$2y = 6$$

となり，$y = 3$ であることがわかる．

例題 0-7　連立 1 次方程式を解く

これを下の式（$x + y = 4$）に代入すると，

$$x + 3 = 4$$

となり，$x = 1$ となる．

例題 0-7　連立 1 次方程式を解く

(2)

$$\begin{cases} 5x + y = 12 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$$

上の式の両辺を 2 倍した式と下の式

$$\begin{cases} 10x + 2y = 24 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$$

の「左辺どうしをたしたもの」$=$「右辺どうしをたしたもの」より，

例題 0-7　連立 1 次方程式を解く

$$11x = 22$$

となり，$x = 2$ である．これを上の式（$5x + y = 12$）に代入すると，$10 + y = 12$ となり，$y = 2$ となる．

例題 0-7　連立 1 次方程式を解く

(3)

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ x + 2y + 2z = 17 \\ 3x + 4z = 17 \end{cases}$$

上の式の両辺を 2 倍した式と真ん中の式

$$\begin{cases} 4x + 2y = 22 \\ x + 2y + 2z = 17 \end{cases}$$

の「左辺どうしをひいたもの」$=$「右辺どうしをひいたもの」より，

例題 0-7　連立 1 次方程式を解く

$$3x - 2z = 5$$

となる．この式と問題の連立方程式の下の式

$$\begin{cases} 3x - 2z = 5 \\ 3x + 4z = 17 \end{cases}$$

の「左辺どうしをひいたもの」$=$「右辺どうしをひいたもの」より，

例題 0-7　連立 1 次方程式を解く

$$-6z = -12$$

となり，$z = 2$ である．これを下の式（$3x + 4z = 17$）に代入すると，$3x + 8 = 17$，つまり，$3x = 9$ となり，$x = 3$ となる．

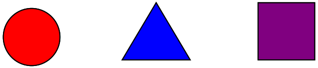
さらに，これを問題の連立方程式の上の式（$2x + y = 11$）に代入すると，$6 + y = 11$ となり，$y = 5$ となる．

第 1 章　順列，組み合わせ

1.1　順列

例題1-1　5色から3つの図形に別々の色をぬるときのパターンを調べる

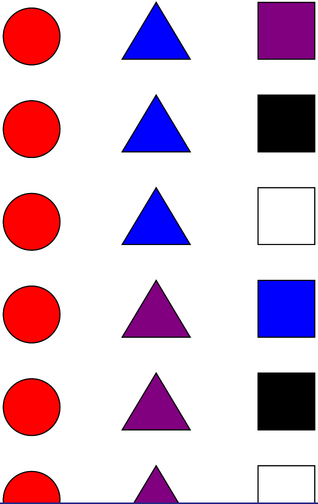
○，△，□の3つの図形に別々の色をぬりたい．
ただし，色は「赤，青，紫，黒，白」の5色から選ぶとする．



このとき，何通りのぬり方があるのか？

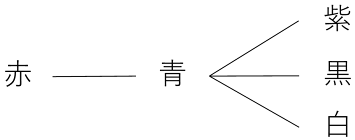
例題 1-1　5 色から 3 つの図形に別々の色をぬるときのパターンを調べる

たとえば・・・



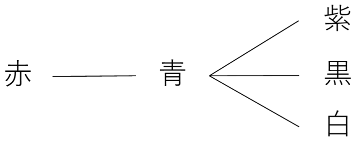
例題 1-1　5 色から 3 つの図形に別々の色をぬるときのパターンを調べる

○に「赤」をぬり，△に「青」をぬったとき



例題 1-1　5色から3つの図形に別々の色をぬるときのパターンを調べる

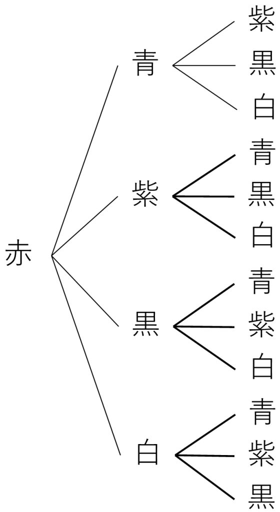
○に「赤」をぬり，△に「青」をぬったとき



このような図（樹形図）であらわすことができる．

例題 1-1　5色から3つの図形に別々の色をぬるときのパターンを調べる

◯に「赤」をぬったとき



例題 1-1　5 色から 3 つの図形に別々の色をぬるときのパターンを調べる

◯に「赤」をぬったとき，それ以外の色のぬり方は

$$4 \times 3 = 12$$

より，12 通りある．

例題1-1　5色から3つの図形に別々の色をぬるときのパターンを調べる

◯に5色「赤，青，紫，黒，白」のどの色をぬったとしても，それ以外の色のぬり方は，それぞれ「3×4」通りある．

例題1-1　5色から3つの図形に別々の色をぬるときのパターンを調べる

◯に5色「赤，青，紫，黒，白」のどの色をぬったとしても，それ以外の色のぬり方は，それぞれ「3×4」通りある．

つまり，求める色のぬり方全体は

$$\mathbf{5} \times \mathbf{4} \times \mathbf{3} = 60$$

より，60通りある．

例題 1-1　5 色から 3 つの図形に別々の色をぬるときのパターンを調べる

5 色から 3 つの図形に別々の色をぬるときのぬり方の総数（まとめ）

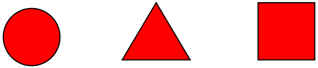
◯ については 5 色からどれか選び，
△ については残りものの 4 色からどれか選び，
□ についてはさらに残りものの 3 色からどれかを選ぶということである．

これより色のぬり方の総数は，「$5 \times 4 \times 3$」となる．

例題 1-2　5 色から 3 つの図形に色をぬるときのパターンを調べる

○，△，□の 3 つの図形に色をぬりたい．

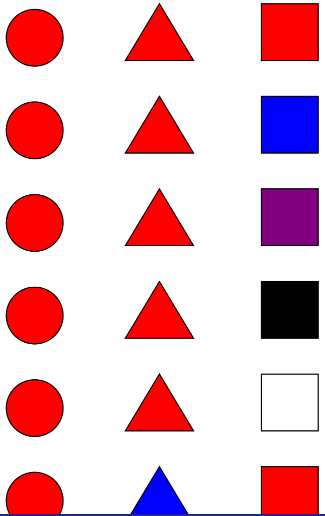
ただし，色は「赤，青，紫，黒，白」の 5 色から選ぶとする．



別々の色でなくてもいいとするとき，何通りのぬり方があるのか？

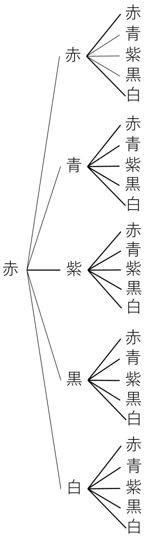
例題 1-2　5 色から 3 つの図形に色をぬるときのパターンを調べる

たとえば・・・



例題 1-2　5 色から 3 つの図形に色をぬるときのパターンを調べる

○ に赤をぬったとき



例題 1-2　5 色から 3 つの図形に色をぬるときのパターンを調べる

◯に「赤」をぬったとき，それ以外の色のぬり方は

$$5 \times 5 = 25$$

より，25 通りある．

例題 1-2　5 色から 3 つの図形に色をぬるときのパターンを調べる

◯ に 5 色「赤，青，紫，黒，白」のどの色をぬったとしても，それ以外の色のぬり方は，それぞれ「5×5」通りある．

例題 1-2　5 色から 3 つの図形に色をぬるときのパターンを調べる

◯に 5 色「赤，青，紫，黒，白」のどの色をぬったとしても，それ以外の色のぬり方は，それぞれ「5×5」通りある．

つまり，求める色のぬり方全体は

$$\mathbf{5} \times \mathbf{5} \times \mathbf{5} = 125$$

より，125 通りある．

例題 1-2　5 色から 3 つの図形に色をぬるときのパターンを調べる

5 色から 3 つの図形に色をぬるときのぬり方の総数（まとめ）

○ については 5 色からどれか選び，
△ についても 5 色からどれか選び，
□ についても 5 色からどれかを選ぶということである．

これより色のぬり方の総数は，「$5 \times 5 \times 5$」となる．

1.2　組み合わせ

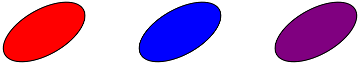
例題 1-3　5 色から 3 つの図形に別々の色をぬるときに必要な絵の具の組み合わせのパターンは？

例題 1-1 においては,「赤，青，紫，黒，白」の 5 色から，○，△，□の 3 つの図形に別々の色をぬるときのぬり方の総数を調べ，
「$5 \times 4 \times 3$」より 60 であることがわかった．

例題 1-3　5 色から 3 つの図形に別々の色をぬるときに必要な絵の具の組み合わせのパターンは？

例題 1-1 においては,「赤，青，紫，黒，白」の 5 色から，◯，△，□の 3 つの図形に別々の色をぬるときのぬり方の総数を調べ,「$5 \times 4 \times 3$」より 60 であることがわかった．

つぎは，その際に必要な絵の具の組み合わせのパターンはどれだけあるかを考えてみよう．



例題 1-3　5 色から 3 つの図形に別々の色をぬるときに必要な絵の具の組み合わせのパターンを調べる

たとえば，{ 赤，青，紫 } の絵の具の組み合わせでぬられる図形のぬり方は

赤 < 青 — 紫
　　 紫 — 青

青 < 赤 — 紫
　　 紫 — 赤

紫 < 赤 — 青
　　 青 — 赤

例題 1-3　5 色から 3 つの図形に別々の色をぬるときに必要な絵の具の組み合わせのパターンを調べる

$$3 \times 2 \times 1$$

より，6 通りある．

例題 1-3　5 色から 3 つの図形に別々の色をぬるときに必要な絵の具の組み合わせのパターンを調べる

$$3 \times 2 \times 1$$

より，6 通りある．

このように，ある絵の具の組み合わせを決めると，それを使っての図形のぬり方が 6 通りある．

例題1-3　5色から3つの図形に別々の色をぬるときに必要な絵の具の組み合わせのパターンを調べる

すなわち，5色から，◯，△，□の3つの図形に別々の色をぬるときのぬり方は $(5 \times 4 \times 3 =)$ 60通りあるが，そのなかの $(3 \times 2 \times 1 =)$ 6つ1組に対して絵の具の組み合わせが1つに決まるということである．

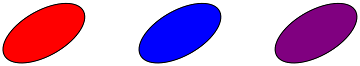
例題 1-3　5 色から 3 つの図形に別々の色をぬるときに必要な絵の具の組み合わせのパターンを調べる

赤 < 青 — 紫 / 紫 — 青

青 < 赤 — 紫 / 紫 — 赤

紫 < 赤 — 青 / 青 — 赤

$\Rightarrow$



6 通りの図形のぬり方に対して絵の具の組み合わせが 1 つに決まる

例題 1-3　5 色から 3 つの図形に別々の色をぬるときに必要な絵の具の組み合わせのパターンを調べる

よって，絵の具の組み合わせは全部で

$$\frac{\mathbf{5 \times 4 \times 3}}{\mathbf{3 \times 2 \times 1}} = \frac{60}{6} = 10$$

より，10 通りあるということがわかる．

例題 1-3　5 色から 3 つの図形に別々の色をぬるときに必要な絵の具の組み合わせのパターンを調べる

5 色から 3 つの図形に別々の色をぬるときに必要な絵の具の組み合わせの総数（まとめ）

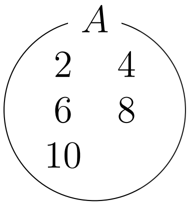
色のぬり方の総数「$5\times4\times3$」を，ある絵の具の組み合わせを使ったときのぬり方の総数「$3\times2\times1$」で割って,「$(\mathbf{5}\times\mathbf{4}\times\mathbf{3})/(\mathbf{3}\times\mathbf{2}\times\mathbf{1})$」というように計算できる．

第 2 章　集合，ベン図

2.1　集合

例題 2-1　集合の例

集合とは「もの」の集まりであり，そこに入るか入らないかの基準がはっきりしているものである．

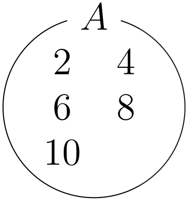


集合 A をあらわすベン図

例題 2-1　集合の例

集合とは「もの」の集まりであり，そこに入るか入らないかの基準がはっきりしているものである．

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$



集合 A をあらわすベン図

例題2-1　集合の例

集合の元

集合をつくっているひとつひとつの「もの」のことは元，または，要素とよばれる.

例題2-1　集合の例

集合の元

集合をつくっているひとつひとつの「もの」のことは元，または，要素とよばれる.

あるもの x が集合 X の元であるとき，次のように書かれる.

$$x \in X \qquad \text{または} \qquad X \ni x$$

例題2-1　集合の例

集合の元

集合をつくっているひとつひとつの「もの」のことは元，または，要素とよばれる.

あるもの x が集合 X の元であるとき，次のように書かれる.

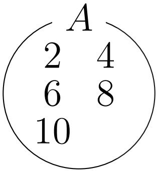
$$x \in X \qquad \text{または} \qquad X \ni x$$

元でないときは，次のように書かれる.

$$x \notin X \qquad \text{または} \qquad X \not\ni x$$

例題 2-2　集合のあらわし方を確認する

集合のあらわし方は，すべての元を $\{\quad\}$ のなかに書き並べる方法とその集合の元であるための条件を書く方法の 2 通りある．



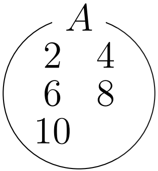
集合 A をあらわすベン図

例題 2-2　集合のあらわし方を確認する

集合のあらわし方は，すべての元を $\{\quad\}$ のなかに書き並べる方法とその集合の元であるための条件を書く方法の 2 通りある．

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$A = \{\, n \mid n \text{ は } 10 \text{ 以下の正の偶数} \,\}$$



集合 A をあらわすベン図

例題 2-3　集合の包含関係を確認する

$$A = \{\, n \mid n \text{ は } 30 \text{ 以下の正の } 5 \text{ の倍数} \,\} = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\},$$

$$B = \{\, n \mid n \text{ は } 30 \text{ 以下の正の } 10 \text{ の倍数} \,\} = \{10, 20, 30\}$$

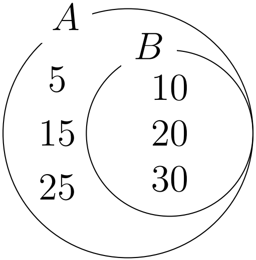
とすると，集合 B のどの元も集合 A の元である．

例題2-3　集合の包含関係を確認する

このことを，B は A の部分集合といい，

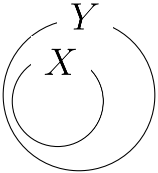
$$B \subset A$$

とあらわす．



例題 2-3　集合の包含関係を確認する

部分集合



$X \subset Y$ をあらわすベン図

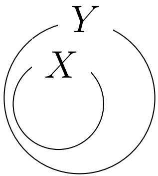
例題 2-3　集合の包含関係を確認する

部分集合

集合 X のどの元も集合 Y の元であるとき，X は Y の部分集合であるといい，

$$X \subset Y \qquad \text{または} \qquad Y \supset X$$

と書く．



$X \subset Y$ をあらわすベン図

例題2-3　集合の包含関係を確認する

$X \subset Y$ かつ $Y \subset X$ であるときは，X と Y はまったく元が同じということであり，

$$X = Y$$

とあらわす．

例題2-3　集合の包含関係を確認する

$X \subset Y$ かつ $Y \subset X$ であるときは，X と Y はまったく元が同じということであり，

$$X = Y$$

とあらわす．このとき，X と Y は等しいとする．

例題 2-3　集合の包含関係を確認する

元をひとつももたないような集合のことを空集合とよび，

$$\emptyset, \text{ または, } \{ \ \}$$

であらわす．

例題2-3　集合の包含関係を確認する

元をひとつももたないような集合のことを空集合とよび，

$$\varnothing\text{，または，}\{\ \}$$

であらわす．たとえば，次のように書けるということになる．

$$\{\, n \mid n \text{ は } 5 \text{ 以下の正の } 10 \text{ の倍数} \,\} = \varnothing,$$

$$\{\, x \mid x^2 = 3 \text{ となるような自然数} \,\} = \varnothing$$

2.2　ベン図

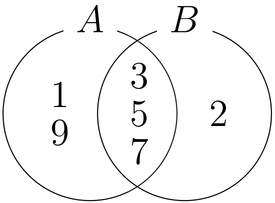
例題 2-4　集合をベン図であらわす

集合を「まる」の形で表現した図のことをベン図とよぶ．

例題 2-4　集合をベン図であらわす

集合を「まる」の形で表現した図のことをベン図とよぶ.

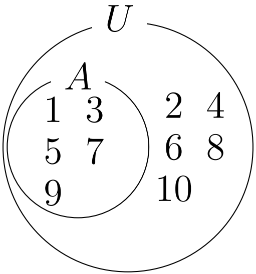
$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{2, 3, 5, 7\}$ とすると,



集合 A, B をあらわすベン図

例題2-4　集合をベン図であらわす

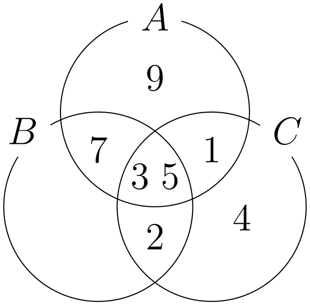
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,　$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ とすると，



集合 U, A をあらわすベン図

例題 2-4　集合をベン図であらわす

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$,　$B = \{2, 3, 5, 7\}$,　$C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とすると，

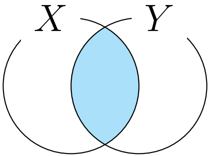


集合 A, B, C をあらわすベン図

2.3　集合の演算

例題 2-5　共通部分と和集合を求める

共通部分



共通部分 $X \cap Y$ をあらわすベン図

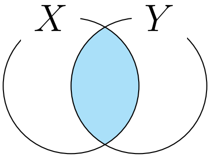
例題 2-5　共通部分と和集合を求める

共通部分

2 つの集合 X，Y に対し，どちらの元でもあるもの全体を

$$X \cap Y$$

と書き，X と Y の共通部分という．



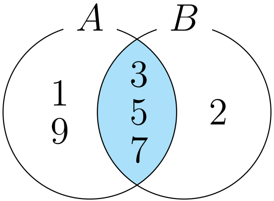
共通部分 $X \cap Y$ をあらわすベン図

例題2-5　共通部分と和集合を求める

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{2, 3, 5, 7\}$$

このとき，

$$A \cap B =$$



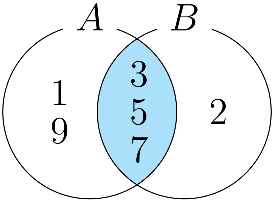
共通部分 $A \cap B$ をあらわすベン図

例題 2-5　共通部分と和集合を求める

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{2, 3, 5, 7\}$$

このとき，

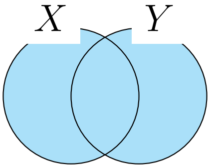
$$A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{2, 3, 5, 7\} = \{3, 5, 7\}$$



共通部分 $A \cap B$ をあらわすベン図

例題 2-5　共通部分と和集合を求める

和集合



和集合 $X \cup Y$ をあらわすベン図

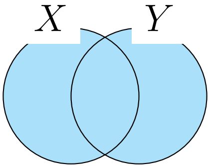
例題 2-5　共通部分と和集合を求める

和集合

2 つの集合 X，Y に対し，少なくともどちらかの元であるもの全体を

$$X \cup Y$$

と書き，X と Y の和集合という．



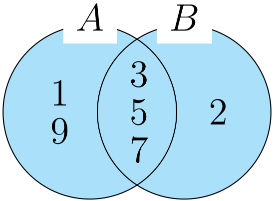
和集合 $X \cup Y$ をあらわすベン図

例題 2-5　共通部分と和集合を求める

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{2, 3, 5, 7\}$$

このとき，

$$A \cup B =$$



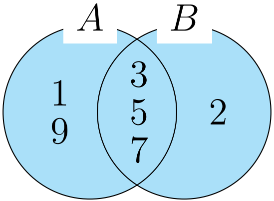
和集合 $A \cup B$ をあらわすベン図

例題 2-5　共通部分と和集合を求める

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{2, 3, 5, 7\}$$

このとき，

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{2, 3, 5, 7\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$$



和集合 $A \cup B$ をあらわすベン図

例題2-5　共通部分と和集合を求める

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{2, 3, 5, 7\}, \quad C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

このとき，

$$A \cup (B \cap C) = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{2, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$$

例題 2-5　共通部分と和集合を求める

$$A = \{1,3,5,7,9\},\quad B = \{2,3,5,7\},\quad C = \{1,2,3,4,5\}$$

このとき，

$$A \cup (B \cap C) = \{1,3,5,7,9\} \cup \{2,3,5\} = \{1,2,3,5,7,9\}$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1,2,3,5,7,9\} \cap \{1,2,3,4,5,7,9\} = \{1,2,3,5,7,9\}$$

例題 2-5　共通部分と和集合を求める

$$A = \{1,3,5,7,9\},\quad B = \{2,3,5,7\},\quad C = \{1,2,3,4,5\}$$

このとき，

$$A \cap (B \cup C) = \{1,3,5,7,9\} \cap \{1,2,3,4,5,7\} = \{1,3,5,7\}$$

例題 2-5　共通部分と和集合を求める

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{2, 3, 5, 7\}, \quad C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

このとき，

$$A \cap (B \cup C) = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{3, 5, 7\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 3, 5, 7\}$$

例題 2-5　共通部分と和集合を求める

よって，次が成り立つ．

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

例題 2-5　共通部分と和集合を求める

よって，次が成り立つ．

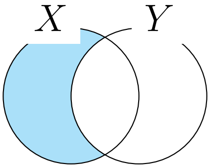
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

このふたつの式は一般にも成立し，分配法則といわれる．

例題2-6　差集合を求める

差集合



差集合 $X - Y$ をあらわすベン図

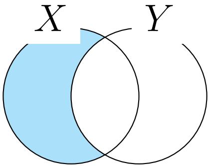
例題 2-6　差集合を求める

差集合

2 つの集合 X，Y に対し，X の元であり Y の元ではないもの全体を

$$X - Y$$

と書き，X から Y をひいた差集合という．



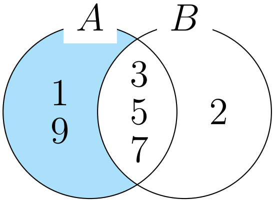
差集合 $X - Y$ をあらわすベン図

例題 2-6　差集合を求める

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{2, 3, 5, 7\}$$

このとき，

$$A - B =$$



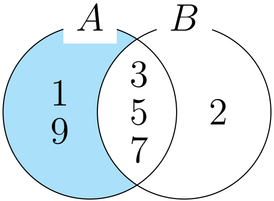
差集合 $A - B$ をあらわすベン図

例題 2-6　差集合を求める

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{2, 3, 5, 7\}$$

このとき，

$$A - B = \{1, 3, 5, 7, 9\} - \{2, 3, 5, 7\} = \{1, 9\}$$



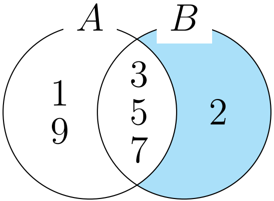
差集合 $A - B$ をあらわすベン図

例題 2-6　差集合を求める

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{2, 3, 5, 7\}$$

このとき，

$$B - A =$$



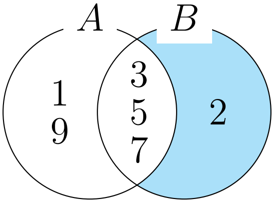
差集合 $B - A$ をあらわすベン図

例題 2-6　差集合を求める

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{2, 3, 5, 7\}$$

このとき，

$$B - A = \{2, 3, 5, 7\} - \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{2\}$$



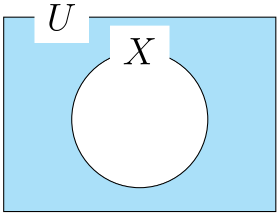
差集合 $B - A$ をあらわすベン図

例題 2-7　補集合を求める

集合を考えるときに，全体集合という（大きい）集合を固定して，各集合をその部分集合としてあつかうことがある．

例題 2-7　補集合を求める

補集合

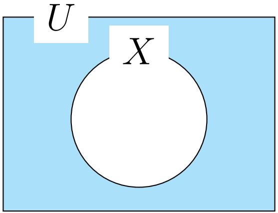


補集合 $\overline{X}$ をあらわすベン図

例題 2-7　補集合を求める

補集合

全体集合を U とするとき，集合 X について，$U - X$ のことを X の補集合とよび，$\overline{X}$ とあらわす．



補集合 $\overline{X}$ をあらわすベン図

例題 2-7　補集合を求める

全体集合 U を

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

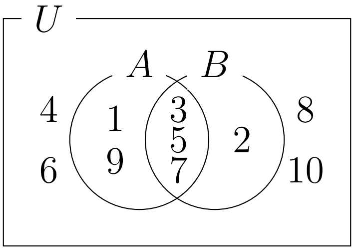
集合 A，B を

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad B = \{2, 3, 5, 7\}$$

とする．

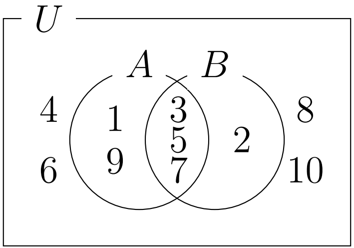
例題 2-7　補集合を求める

$$\overline{A} = U - A =$$



例題 2-7　補集合を求める

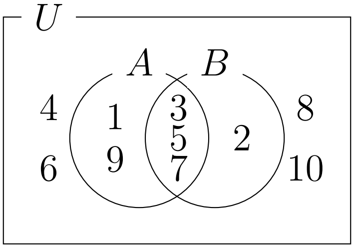
$$\overline{A} = U - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} - \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$



例題2-7　補集合を求める

$$\overline{A} = U - A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} - \{1,3,5,7,9\} = \{2,4,6,8,10\}$$

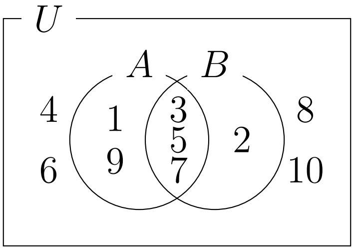
$$\overline{B} = U - B =$$



例題 2-7　補集合を求める

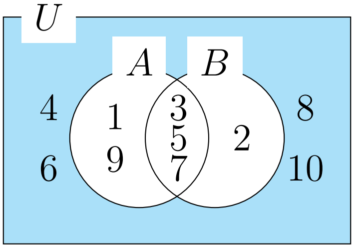
$$\overline{A} = U - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} - \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$\overline{B} = U - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} - \{2, 3, 5, 7\} = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$$



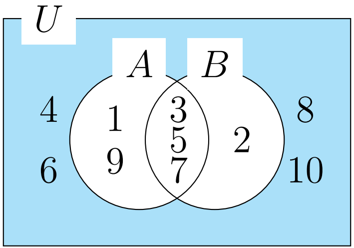
例題 2-7　補集合を求める

$$\overline{A \cup B} =$$



例題 2-7　補集合を求める

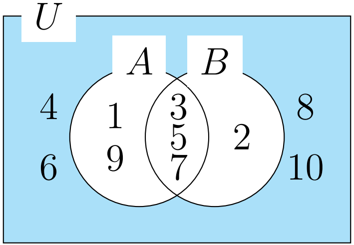
$$\overline{A \cup B} = \overline{\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}} = \{4, 6, 8, 10\}$$



例題 2-7　補集合を求める

$$\overline{A \cup B} = \overline{\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}} = \{4, 6, 8, 10\}$$

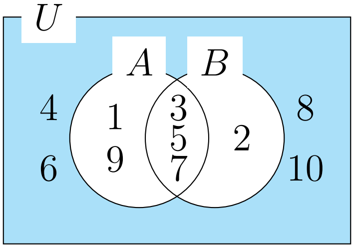
$$\overline{A} \cap \overline{B} =$$



例題 2-7　補集合を求める

$$\overline{A \cup B} = \overline{\{1, 2, 3, 5, 7, 9\}} = \{4, 6, 8, 10\}$$

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{1, 4, 6, 8, 9, 10\} = \{4, 6, 8, 10\}$$

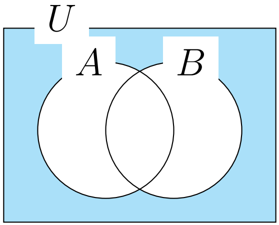


例題 2-7　補集合を求める

よって，次が成り立つことが確認できる．この式は一般にも成立する．

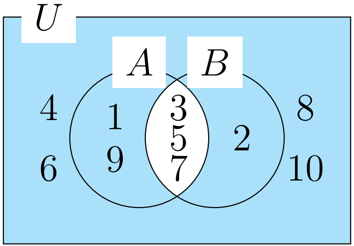
ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$



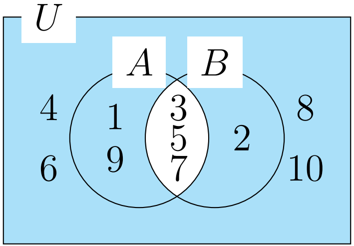
例題 2-7　補集合を求める

$$\overline{A \cap B} =$$



例題 2-7　補集合を求める

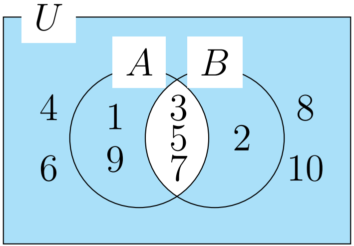
$$\overline{A \cap B} = \overline{\{3, 5, 7\}} = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10\}$$



例題 2-7　補集合を求める

$$\overline{A \cap B} = \overline{\{3, 5, 7\}} = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10\}$$

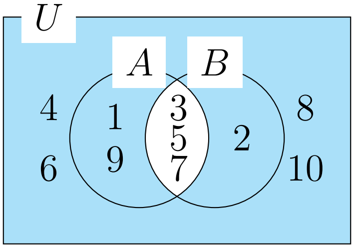
$$\overline{A} \cup \overline{B} =$$



例題 2-7　補集合を求める

$$\overline{A \cap B} = \overline{\{3, 5, 7\}} = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10\}$$

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \{2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{1, 4, 6, 8, 9, 10\} = \{1, 2, 4, 6, 8, 9, 10\}$$

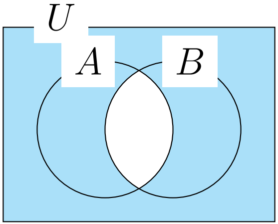


例題 2-7　補集合を求める

よって，次が成り立つことが確認できる．この式は一般にも成立する．

ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$



第3章　確率

3.1　確率の意味

例題 3-1　サイコロを振ったときに 1 の目が出る確率を求める

サイコロを振ったとき，$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ のうちどの目が出るかは同じ程度に期待できるとする．

例題 3-1　サイコロを振ったときに 1 の目が出る確率を求める

サイコロを振ったとき，$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ のうちどの目が出るかは同じ程度に期待できるとする．

サイコロを振る回数が大きくなっていくと，

$$1\text{の目が出る割合} \qquad \text{つまり} \qquad \frac{1\text{の目が出る回数}}{\text{サイコロを振る回数}}$$

は $1/6$ に近づくことが期待できる．

例題 3-1　サイコロを振ったときに 1 の目が出る確率を求める

これを 1 の目が出る確率としたい．

これは，集合を使って考えて，求めることができる．

例題 3-1　サイコロを振ったときに 1 の目が出る確率を求める

試行と事象

「サイコロを振る」というような，結果が偶然に起こるような実験や観測は試行といわれ，試行の結果のいくつかからなる集合のことを事象とよんでいる．

例題3-1　サイコロを振ったときに1の目が出る確率を求める

とくに，試行によって起こりうる結果全体の集合のことは全事象とよばれる．

例題3-1　サイコロを振ったときに1の目が出る確率を求める

とくに，試行によって起こりうる結果全体の集合のことは全事象とよばれる．

「サイコロを振る」という試行についての全事象 U は

$$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

とあらわすことができる．

例題 3-1　サイコロを振ったときに 1 の目が出る確率を求める

また，元がひとつの集合であらわされる事象は根元事象とよばれる．

例題 3-1　サイコロを振ったときに 1 の目が出る確率を求める

また，元がひとつの集合であらわされる事象は根元事象とよばれる．

「1 の目が出る」という事象 A は，

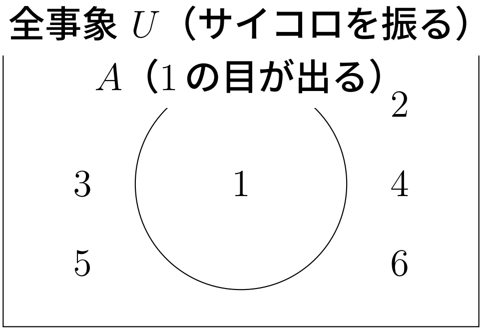
$$A = \{1\}$$

というように U の部分集合であらわすことができる．これは，元がひとつの集合であらわされる事象なので，根元事象である．

例題3-1　サイコロを振ったときに1の目が出る確率を求める

$$
\begin{aligned}
1\,\text{の目が出る確率} &= \frac{\text{事象}\,A\,\text{の元の個数}}{\text{全事象}\,U\,\text{の元の個数}} \\
&= \frac{1\,\text{の目が出る場合の数}}{\text{出る目についてのすべての場合の数}} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

例題3-1　サイコロを振ったときに1の目が出る確率を求める



サイコロを振ったとき1の目が出る確率をあらわすベン図

例題 3-1　サイコロを振ったときに 1 の目が出る確率を求める

サイコロを振ったときに出る目のように,「同じ程度に起こることが期待できる」という意味は同様に確からしいと表現されることがある.

例題 3-1　サイコロを振ったときに 1 の目が出る確率を求める

サイコロを振ったときに出る目のように,「同じ程度に起こることが期待できる」という意味は同様に確からしいと表現されることがある.

一般に，全事象 U の各根元事象が起こることが互いに同様に確からしいとすると，事象 A が起こる確率は次のように求められる.

例題 3-1　サイコロを振ったときに 1 の目が出る確率を求める

確率の求め方

$$\text{事象}\,A\,\text{が起こる確率} = \frac{\text{事象}\,\boldsymbol{A}\,\text{の元の個数}}{\text{全事象}\,\boldsymbol{U}\,\text{の元の個数}}$$

$$= \frac{\text{事象}\,A\,\text{が起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}$$

例題 3-1　サイコロを振ったときに 1 の目が出る確率を求める

サイコロを振ったときに「奇数の目が出る確率（$1/2$）」は

「1 の目が出る確率（$1/6$）」$+$「3 の目が出る確率（$1/6$）」
$+$「5 の目が出る確率（$1/6$）」

と計算して求めることもできる．

例題3-1　サイコロを振ったときに1の目が出る確率を求める

このように，それぞれの確率をたして求めることができるのは，1の目が出ることと3の目が出ることと5の目が出ることが同時に起こらないからである．

例題 3-1　サイコロを振ったときに 1 の目が出る確率を求める

このように，それぞれの確率をたして求めることができるのは，1 の目が出ることと 3 の目が出ることと 5 の目が出ることが同時に起こらないからである．

一般に，事象 A と事象 B が同時に起こることがない場合，互いに排反であるといわれる．

例題3-1　サイコロを振ったときに1の目が出る確率を求める

加法定理（2つの事象が互いに排反である場合）

事象 A と事象 B が互いに排反であるとき，次が成り立つ．

$$A\text{ または }B\text{ が起こる確率} = A\text{ が起こる確率} + B\text{ が起こる確率}$$

例題 3-2　サイコロを振ったときに 1 以外の目が出る確率を求める

サイコロを振ったときに 1 以外の目が出る確率は

$$\frac{1\ \text{以外の目が出る場合の数}}{\text{出る目についてのすべての場合の数}}$$

により求められる．

例題 3-2　サイコロを振ったときに 1 以外の目が出る確率を求める

出る目についてのすべての場合は $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ なので 6 通りあり，1 以外の目が出る場合は $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ なので 5 通りある．

例題3-2　サイコロを振ったときに 1 以外の目が出る確率を求める

出る目についてのすべての場合は $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ なので 6 通りあり，1 以外の目が出る場合は $\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ なので 5 通りある．

よって，求める確率は

$$\frac{5}{6}$$

である．

例題 3-2　サイコロを振ったときに 1 以外の目が出る確率を求める

[別解]

$$「1\text{ 以外の目が出る確率}」= 1 -「1\text{ の目が出る確率}」$$

$$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

例題 3-2　サイコロを振ったときに 1 以外の目が出る確率を求める

一般に，事象 A に対して，A が起こらないという事象を A の余事象といい，$\overline{A}$ であらわす．

例題3-2　サイコロを振ったときに1以外の目が出る確率を求める

一般に，事象Aに対して，Aが起こらないという事象をAの余事象といい，$\overline{A}$であらわす．

余事象の確率

「$\overline{A}$が起こる確率」$= 1 -$「Aが起こる確率」

例題3-3　サイコロを 2 回振ったときに同じ目が出る確率を求める

サイコロを 2 回振ったとき，出る目についてのすべての場合は

$$
\begin{aligned}
\{&(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6),\\
&(2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6),\\
&(3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),\\
&(4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6),\\
&(5,1),\ (5,2),\ (5,3),\ (5,4),\ (5,5),\ (5,6),\\
&(6,1),\ (6,2),\ (6,3),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6)\}
\end{aligned}
$$

なので，6×6 より 36 通りある．

例題 3-3　サイコロを 2 回振ったときに同じ目が出る確率を求める

このうち，同じ目が出る場合は

$$\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (6,6)\}$$

なので，6 通りある．

例題3-3　サイコロを2回振ったときに同じ目が出る確率を求める

このうち，同じ目が出る場合は

$$\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (6,6)\}$$

なので，6通りある．よって，求める確率は

$$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

となる．

3.2　条件付き確率

例題 3-4　サイコロを振って 1 以外の目が出たということがわかっているとき，その目が 2 である確率を求める

（2 以上の目が出たことは確定しているので）$\{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ の 5 通りのなかでの 2 の目が出る割合を考えればいい．

例題 3-4　サイコロを振って 1 以外の目が出たということがわかっているとき，その目が 2 である確率を求める

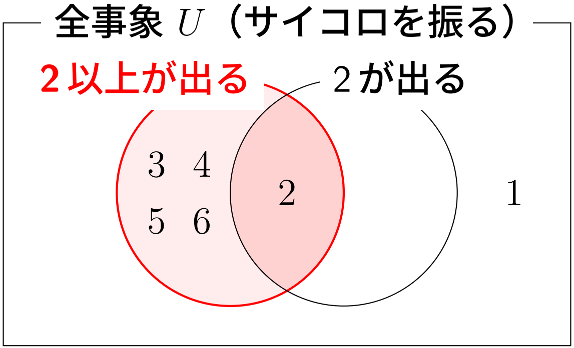
（2 以上の目が出たことは確定しているので）$\{\mathbf{2},\ \mathbf{3},\ \mathbf{4},\ \mathbf{5},\ \mathbf{6}\}$ の **5** 通りのなかでの **2** の目が出る割合を考えればいい．

2 の目が出る場合は $\{2\}$ で 1 通りだけなので，求める確率は

$$\frac{1}{5}$$

である．

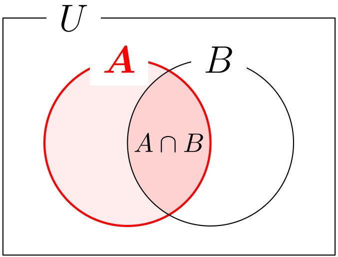
例題3-4　サイコロを振って1以外の目が出たということがわかっているとき，その目が2である確率を求める



サイコロを振って1以外の目が出たときその目が2である確率をあらわすベン図

例題3-4　サイコロを振って 1 以外の目が出たということがわかっているとき，その目が 2 である確率を求める

一般に，事象 A が起こったという条件のもとで事象 B が起こる確率のことを条件付き確率という．



例題 3-4　サイコロを振って 1 以外の目が出たということがわかっているとき，その目が 2 である確率を求める

条件付き確率を求める式

$$A\text{のもとで}B\text{が起こる条件付き確率} = \frac{A\cap B\text{が起こる場合の数}}{A\text{が起こる場合の数}}$$

$$= \frac{A\text{かつ}B\text{が起こる確率}}{A\text{が起こる確率}}$$

例題3-5　サイコロを 2 回振ったときにどちらも奇数の目が出る確率を求める

サイコロを 2 回振ったとき，出る目についてのすべての場合は

$$
\begin{aligned}
\{&(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (1,6),\\
&(2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6),\\
&(3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),\\
&(4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6),\\
&(5,1),\ (5,2),\ (5,3),\ (5,4),\ (5,5),\ (5,6),\\
&(6,1),\ (6,2),\ (6,3),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6)\}
\end{aligned}
$$

なので，6×6 より 36 通りある．

例題3-5　サイコロを 2 回振ったときにどちらも奇数の目が出る確率を求める

このうち，どちらも奇数の目が出る場合を書き出すと，

$$\{(1,1),\ (1,3),\ (1,5),\ (3,1),\ (3,3),\ (3,5),\ (5,1),\ (5,3),\ (5,5)\}$$

なので，9 通りある（3×3 より求められる）．

例題3-5　サイコロを 2 回振ったときにどちらも奇数の目が出る確率を求める

このうち，どちらも奇数の目が出る場合を書き出すと，

$$\{(1,1),\ (1,3),\ (1,5),\ (3,1),\ (3,3),\ (3,5),\ (5,1),\ (5,3),\ (5,5)\}$$

なので，9 通りある（3×3 より求められる）．よって，求める確率は

$$\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

である．

例題 3-5　サイコロを 2 回振ったときにどちらも奇数の目が出る確率を求める

[別解]

「どちらも奇数の目が出る確率（$1/4$）」は

「1 回目に奇数の目が出る確率（$1/2$）」

× 「2 回目に奇数の目が出る確率（$1/2$）」

と計算して求めることもできる（独立事象の乗法定理）．

例題 3-5　サイコロを 2 回振ったときにどちらも奇数の目が出る確率を求める

このように，それぞれの確率をかけあわせて求めることができるのは，

「1 回目に奇数の目が出るという事象」と「2 回目に奇数の目が出るという事象」が互いに影響されない

からである．

例題3-5　サイコロを2回振ったときにどちらも奇数の目が出る確率を求める

このように，それぞれの確率をかけあわせて求めることができるのは，

「1回目に奇数の目が出るという事象」と「2回目に奇数の目が出るという事象」が互いに影響されない

からである．このようなとき，「1回目に奇数の目が出たとき2回目に奇数の目が出る確率」と「2回目に奇数の目が出る確率」が互いに等しいはずである．

例題 3-5　サイコロを 2 回振ったときにどちらも奇数の目が出る確率を求める

ここで，条件付き確率を求める式を変形すると，

A かつ B が起こる確率
　　$=$ A が起こる確率 $\times$ A のもとで B が起こる条件付き確率

となる（乗法定理）．

例題3-5　サイコロを2回振ったときにどちらも奇数の目が出る確率を求める

事象A，Bが互いに影響を与えないという場合は，

$\boldsymbol{A}$のもとで$\boldsymbol{B}$が起こる条件付き確率 $=$ $\boldsymbol{B}$が起こる確率
（つまり，Bが起こる確率はAが起こったかどうかに影響されない）

ということになるので，乗法定理は

$\boldsymbol{A}$かつ$\boldsymbol{B}$が起こる確率 $=$ $\boldsymbol{A}$が起こる確率 $\times$ $\boldsymbol{B}$が起こる確率

となる．

例題3-5　サイコロを2回振ったときにどちらも奇数の目が出る確率を求める

事象A，Bが互いに影響を与えないという場合は，

$\boldsymbol{A}$のもとで$\boldsymbol{B}$が起こる条件付き確率 $=$ $\boldsymbol{B}$が起こる確率
（つまり，Bが起こる確率はAが起こったかどうかに影響されない）

ということになるので，乗法定理は

$\boldsymbol{A}$かつ$\boldsymbol{B}$が起こる確率 $=$ $\boldsymbol{A}$が起こる確率 $\times$ $\boldsymbol{B}$が起こる確率

となる．また，事象A，Bの立場を入れ替えた場合も同様のことがいえる．そこで，このとき，事象A，Bは互いに独立であるという．

例題 3-5　サイコロを 2 回振ったときにどちらも奇数の目が出る確率を求める

独立事象の乗法定理

事象 A，B が互いに独立であるとは，次が成り立つことをいう．

$$A\text{かつ}B\text{が起こる確率} = A\text{が起こる確率} \times B\text{が起こる確率}$$

（つまり，事象 A，B が互いに独立であるとは，B が起こる確率は A が起こったかどうかに影響されない，ということをいう）

例題3-6　サイコロを3回振ったときにどれも奇数の目が出る確率を求める

「1回目に奇数の目が出るという事象」と「2回目に奇数の目が出るという事象」と「3回目に奇数の目が出るという事象」は独立なので，3回とも奇数の目が出る確率は，これらの各確率をかけあわせて

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

と計算して求めることができる（独立事象の乗法定理）．

第 4 章　代表値

4.1　平均値

例題 4-1　平均値を求める

ある 10 人のクラスにおいて，数学のテストの点数がそれぞれ

$$95,\ 55,\ 100,\ 50,\ 60,\ 50,\ 100,\ 90,\ 80,\ 100$$

であった．このとき，平均点は，

$$\frac{95+55+100+50+60+50+100+90+80+100}{10}=\frac{780}{10}=78$$

より，78 点となる．

例題 4-1　平均値を求める

相加平均値

$$\text{相加平均値} = \frac{\text{合計}}{\text{個数}}$$

例題 4-1　平均値を求める

相加平均値

$$\text{相加平均値} = \frac{\text{合計}}{\text{個数}}$$

これより，合計 $=$ 相加平均値 $\times$ 個数

例題 4-1　平均値を求める

相加平均値

$$\text{相加平均値} = \frac{\text{合計}}{\text{個数}}$$

これより，$\text{合計} = \text{相加平均値} \times \text{個数}$

つまり，$\text{相加平均値} + \text{相加平均値} + \cdots + \text{相加平均値} = \text{合計}$

例題 4-1　平均値を求める

相加平均値の意味

「もしどの点数も相加平均値 78 であると強引にみなしてしまったとしても，それらの合計はもともとの合計 780 と変わらない」というものが相加平均値である．

例題 4-1　平均値を求める

$$95 + 55 + 100 + 50 + 60 + 50 + 100 + 90 + 80 + 100 = 780$$

（もともとの合計）

例題 4-1　平均値を求める

$$95 + 55 + 100 + 50 + 60 + 50 + 100 + 90 + 80 + 100 = 780$$

（もともとの合計）

$$78 + 78 + 78 + 78 + 78 + 78 + 78 + 78 + 78 + 78 = 780$$

（どの点数も 78 としたときの合計）

例題 4-1　平均値を求める

相加平均値のように，データの中心的傾向をひとつの数値で代表したものは代表値とよばれる．代表値はデータを代表する値ということであり，平均値，中央値，そして，最頻値などが使われる．

例題 4-2　売り上げの伸びの平均倍率を求める

ある商品の 2 年目の売り上げは 1 年目の 2 倍，3 年目の売り上げは 2 年目の 8 倍に伸びたとする．このとき，1 年間での売り上げの伸びの平均倍率は？

例題 4-2　売り上げの伸びの平均倍率を求める

ある商品の 2 年目の売り上げは 1 年目の 2 倍，3 年目の売り上げは 2 年目の 8 倍に伸びたとする．このとき，1 年間での売り上げの伸びの平均倍率は？

3 年目の売り上げは 1 年目の $(2 \times 8 =)\,16$ 倍に伸びたということになる．売り上げの伸びの倍率をならす（平均する）と，

例題 4-2　売り上げの伸びの平均倍率を求める

1 年目から 2 年目：4 倍

2 年目から 3 年目：さらに 4 倍

となり，その結果，4×4 より 16 倍となったと考えるのが自然である．

例題 4-2　売り上げの伸びの平均倍率を求める

　1 年目から 2 年目：4 倍

　2 年目から 3 年目：さらに 4 倍

となり，その結果，4×4 より 16 倍となったと考えるのが自然である．

よって，1 年間の売り上げの伸びの平均倍率は 4 であると考えることができる．

例題 4-2　売り上げの伸びの平均倍率を求める

この「4」というのは，

$$\sqrt{\mathbf{2} \times \mathbf{8}} = \sqrt{16} = 4$$

というように，2 と 8 をかけて正の平方根（$\sqrt{\ }$）をとって求めている．

例題 4-2　売り上げの伸びの平均倍率を求める

この「4」というのは，

$$\sqrt{\mathbf{2} \times \mathbf{8}} = \sqrt{16} = 4$$

というように，2 と 8 をかけて正の平方根（$\sqrt{\ }$）をとって求めている．

この値を，$\mathbf{2}$ と $\mathbf{8}$ の幾何平均値という．

例題 4-2　売り上げの伸びの平均倍率を求める

幾何平均値

n 個の正の実数について，幾何平均値とは,「それらをすべてかけたもの」の正の n 乗根（n 個かけあわせると「それらをすべてかけたもの」になる正の実数）のことをいう.

例題 4-2　売り上げの伸びの平均倍率を求める

幾何平均値の意味

「もしどの 1 年間での倍率も幾何平均値 4 であると強引にみなしてしまったとしても，2 年間での倍率はもともとの倍率 16 と変わらない」というものが幾何平均値である．

例題 4-2　売り上げの伸びの平均倍率を求める

$$2 \times 8 = 16$$

（もともとの 2 年間での倍率）

例題 4-2　売り上げの伸びの平均倍率を求める

$$2 \times 8 = 16$$

（もともとの 2 年間での倍率）

$$4 \times 4 = 16$$

（どの 1 年間での倍率も 4 としたときの 2 年間での倍率）

例題 4-3　平均の速さを求める

速さ 40 km/時 で 1 時間，速さ 60 km/時 で 1 時間移動したときの平均の速さ（単位：km/時）は？

例題 4-3　平均の速さを求める

速さ 40 km/時 で 1 時間，速さ 60 km/時 で 1 時間移動したときの平均の速さ（単位：km/時）は？

速さ 60 km/時 で 1 時間移動したとき進む距離は 60 km

速さ 40 km/時 で 1 時間移動したとき進む距離は 40 km

例題 4-3　平均の速さを求める

速さ 40 km/時 で 1 時間，速さ 60 km/時 で 1 時間移動したときの平均の速さ（単位：km/時）は？

速さ 60 km/時 で 1 時間移動したとき進む距離は 60 km

速さ 40 km/時 で 1 時間移動したとき進む距離は 40 km

よって，平均の速さは

$$\frac{60+40}{1+1} = 50$$ より，50 km/時　$\left(\text{速さ} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}}\right)$

例題 4-4　往復での平均の速さを求める

行きは速さ 60 km/時，帰りは速さ 40 km/時 で移動したときの往復での平均の速さ（単位：km/時）は？

例題 4-4　往復での平均の速さを求める

行きは速さ 60 km/時，帰りは速さ 40 km/時 で移動したときの往復での平均の速さ（単位：km/時）は？

片道の距離を x km とすると，往復の距離は

$$x \times 2 = 2x \text{ より，} 2x \text{ km}$$

例題4-4　往復での平均の速さを求める

行きは速さ 60 km/時，帰りは速さ 40 km/時 で移動したときの往復での平均の速さ（単位：km/時）は？

片道の距離を x km とすると，往復の距離は

$$x \times 2 = 2x \quad \text{より，} \quad 2x \ \text{km}$$

往復でかかる時間は

$$\left(\frac{x}{60} + \frac{x}{40}\right) \ \text{時間} \qquad \left(\text{時間} = \frac{\text{距離}}{\text{速さ}}\right)$$

例題 4-4　往復での平均の速さを求める

よって，往復での平均の速さは

$$\frac{2x}{\frac{x}{60}+\frac{x}{40}} \overset{\text{分母，分子をそれぞれ } x \text{ で割ると}}{=\!=\!=\!=} \frac{\mathbf{2}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{60}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{40}}} = 48 \qquad \left(\text{速さ} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}}\right)$$

より，48 km/時 となる．

例題 4-4　往復での平均の速さを求める

この「48」というのは，

$$60 \text{ と } 40 \text{ のそれぞれの逆数の相加平均値 } \frac{\frac{1}{60}+\frac{1}{40}}{2} \text{ の逆数 } \boldsymbol{\frac{2}{\frac{1}{60}+\frac{1}{40}}}$$

というように求められる．

例題 4-4　往復での平均の速さを求める

この「48」というのは，

$$60 \text{ と } 40 \text{ のそれぞれの逆数の相加平均値 } \frac{\frac{1}{60}+\frac{1}{40}}{2} \text{ の逆数 } \frac{\mathbf{2}}{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{60}}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{40}}}$$

というように求められる．

この値を，$\mathbf{60}$ と $\mathbf{40}$ の調和平均値という．

例題 4-4　往復での平均の速さを求める

調和平均値

何個かの正の実数について，調和平均値とは,「「それらの逆数」の相加平均値」の逆数のことをいう．

例題4-4　往復での平均の速さを求める

調和平均値の意味

「もし行きも帰りも調和平均値 48 km/時 で移動したと強引にみなしてしまったとしても，往復でかかる時間はもともとかかった時間 $x/24$ と変わらない」というものが調和平均値である．

例題4-4　往復での平均の速さを求める

$$\frac{x}{60}+\frac{x}{40}=\frac{2x+3x}{120}=\frac{5x}{120}=\frac{x}{24}$$

（もともとかかった時間）

例題 4-4　往復での平均の速さを求める

$$\frac{x}{60}+\frac{x}{40}=\frac{2x+3x}{120}=\frac{5x}{120}=\frac{x}{24}$$

（もともとかかった時間）

$$\frac{x}{48}+\frac{x}{48}=\frac{2x}{48}=\frac{x}{24}$$

（行きも帰りも 48 km/時 で移動したときにかかる時間）

4.2　中央値

例題 4-5　人数が半々になるように点数順のクラス分けをする

ある 10 人のクラスにおいて，数学のテストの点数が

$$95,\ 55,\ 100,\ 50,\ 60,\ 50,\ 100,\ 90,\ 80,\ 100$$

であった．ちょうど半々になるように点数順のクラス分けをしたい．

例題 4-5　人数が半々になるように点数順のクラス分けをする

データを小さい順に並べると，

$$50,\ 50,\ 55,\ 60,\ 80,\ 90,\ 95,\ 100,\ 100,\ 100$$

となる．真ん中の大きさの値，つまり，中央値を基準にしてクラス分けをおこなえばいい．

例題 4-5　人数が半々になるように点数順のクラス分けをする

中央値

中央値とは，データを大きさの順に並べ替えたときの真ん中に位置する値のことをいう．

例題 4-5　人数が半々になるように点数順のクラス分けをする

- データの個数が奇数であるとき（つまり真ん中の値が 1 つのとき）はその真ん中の値をそのまま中央値とする．

例題 4-5　人数が半々になるように点数順のクラス分けをする

- データの個数が奇数であるとき（つまり真ん中の値が 1 つのとき）はその真ん中の値をそのまま中央値とする．
- データの個数が偶数であるとき（つまり真ん中の値が 2 つのとき）は「真ん中の 2 つの値の平均値」を中央値とする．

例題 4-5　人数が半々になるように点数順のクラス分けをする

データは全部で 10 個あるので，真ん中の 2 つの値は

「 $(10/2=)$ 5 番目に小さい値の 80」

と

「 $(10/2+1=)$ 6 番目に小さい値の 90」

である．

例題 4-5　人数が半々になるように点数順のクラス分けをする

データの個数が偶数のときは「真ん中の 2 つの値の平均値」を中央値とするので，

$$\frac{80+90}{2}=85$$

より，85 を中央値とするということになる．

例題 4-6　平均値と中央値を求める

アルバイトの時給についてのデータ（単位：円）

$$1200,\ 1000,\ 1050,\ 1100,\ 1050,\ 1000,\ 1300,\ 980,\ 1000,\ 1000,\ 1200$$

について，平均値は

$$\frac{1200+1000+1050+1100+1050+1000+1300+980+1000+1000+1200}{11}$$
$$=1080$$

より，1080 円となる．

例題 4-6　平均値と中央値を求める

データを小さい順に並べると，

$$980,\ 1000,\ 1000,\ 1000,\ 1000,\ 1050,\ 1050,\ 1100,\ 1200,\ 1200,\ 1300$$

となる．

例題 4-6　平均値と中央値を求める

データを小さい順に並べると，

$$980,\ 1000,\ 1000,\ 1000,\ 1000,\ 1050,\ 1050,\ 1100,\ 1200,\ 1200,\ 1300$$

となる．データは全部で 11 個あるので，真ん中の値は

$$\boldsymbol{(}(\mathbf{11}+1)/2=\boldsymbol{)}\ 6\text{番目に小さい値の}\ 1050$$

である．

例題 4-6　平均値と中央値を求める

データを小さい順に並べると，

$$980,\ 1000,\ 1000,\ 1000,\ 1000,\ 1050,\ 1050,\ 1100,\ 1200,\ 1200,\ 1300$$

となる．データは全部で 11 個あるので，真ん中の値は

$$\left((\mathbf{11}+1)/2=\right)\ 6\text{ 番目に小さい値の } 1050$$

である．データの個数が奇数のときは真ん中の値をそのまま中央値とするので，中央値は 1050 円であることがわかる．

4.3　最頻値

例題 4-7　最頻値を求める

ある店舗において，ある一日で売れたくつのサイズ（単位：cm）が

$$25.5,\ 23,\ 23,\ 24.5,\ 24,\ 25,\ 23,\ 24.5,\ 23,\ 23,\ 28,\ 22.5,\ 25.5,\ 23,\ 27$$

であったとする．この店舗で売れるくつのサイズの「代表値」は？

例題 4-7　最頻値を求める

一番売れたサイズはなにかを調べよう.

例題 4-7　最頻値を求める

一番売れたサイズはなにかを調べよう．

データを小さい順に並べると

$$22.5,\ \ 23,\ \ 23,\ \ 23,\ \ 23,\ \ 23,\ \ 23,\ \ 24,\ \ 24.5,\ \ 24.5,\ \ 25,\ \ 25.5,\ \ 25.5,\ \ 27,\ \ 28$$

となり，もっとも売れたサイズは「23 cm」であることがわかる．

例題 4-7　最頻値を求める

一番売れたサイズはなにかを調べよう．

データを小さい順に並べると

$$22.5,\ 23,\ 23,\ 23,\ 23,\ 23,\ 23,\ 24,\ 24.5,\ 24.5,\ 25,\ 25.5,\ 25.5,\ 27,\ 28$$

となり，もっとも売れたサイズは「23 cm」であることがわかる．

これが，この店舗で売れるくつのサイズの「代表値」であると考えることができる．

例題 4-7　最頻値を求める

最頻値

最も頻繁にあらわれるデータのことを最頻値とよぶ.

例題 4-7　最頻値を求める

最頻値

最も頻繁にあらわれるデータのことを最頻値とよぶ．

つまり，最頻値は 23 cm ということである．

例題 4-7　最頻値を求める

最頻値

最も頻繁にあらわれるデータのことを最頻値とよぶ．

つまり，最頻値は 23 cm ということである．

ちなみに，平均値は 24.3 cm，中央値は 24 cm である．

第 5 章　分散，標準偏差

5.1　分散

例題 5-1　各データから平均値をひいたものを調べる

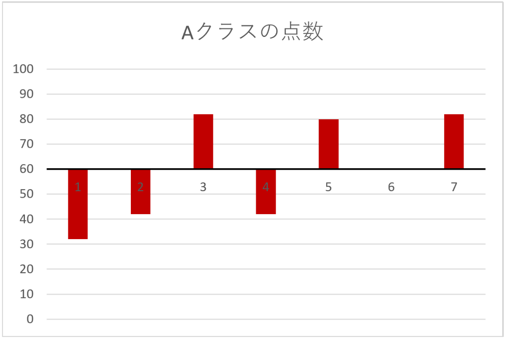
A クラスと B クラスで実施した数学のテストの点数がそれぞれ

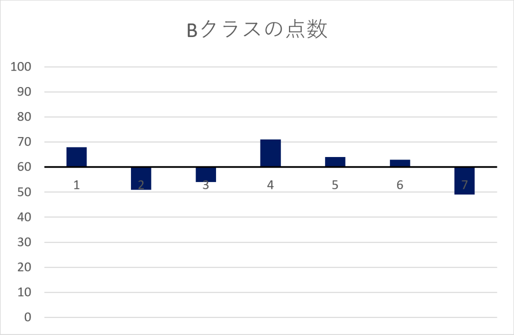
A クラス： $32,\ 42,\ 82,\ 42,\ 80,\ 60,\ 82$

B クラス： $68,\ 51,\ 54,\ 71,\ 64,\ 63,\ 49$

であった．どちらのクラスも平均点は 60 点である．

例題 5-1　各データから平均値をひいたものを調べる





横軸を平均値 60 の高さにした棒グラフ

例題 5-1　各データから平均値をひいたものを調べる

横軸を平均値 60 の高さにした棒グラフを見ると，点数のばらつきかたがクラスによってずいぶんちがうことがわかる．

例題 5-1　各データから平均値をひいたものを調べる

横軸を平均値 60 の高さにした棒グラフを見ると，点数のばらつきかたがクラスによってずいぶんちがうことがわかる．

A クラスの点数は平均点 60 点から離れているものが多そうに見え，B クラスの点数は平均点 60 点あたりにかたまっているように見える．

例題 5-1　各データから平均値をひいたものを調べる

実際に，各データから平均値をひいたもの，つまり，偏差を計算して確認してみよう．

例題 5-1　各データから平均値をひいたものを調べる

実際に，各データから平均値をひいたもの，つまり，偏差を計算して確認してみよう．

> **偏差**
>
> 各データから平均値をひいたものを偏差という．

例題 5-1　各データから平均値をひいたものを調べる

A クラスの点数についての偏差（点数 − 平均値 60）はそれぞれ

$$32 - 60,\quad 42 - 60,\quad 82 - 60,\quad 42 - 60,\quad 80 - 60,\quad 60 - 60,\quad 82 - 60$$

例題 5-1　各データから平均値をひいたものを調べる

A クラスの点数についての偏差（点数 $-$ 平均値 60）はそれぞれ

$$32-60,\quad 42-60,\quad 82-60,\quad 42-60,\quad 80-60,\quad 60-60,\quad 82-60$$

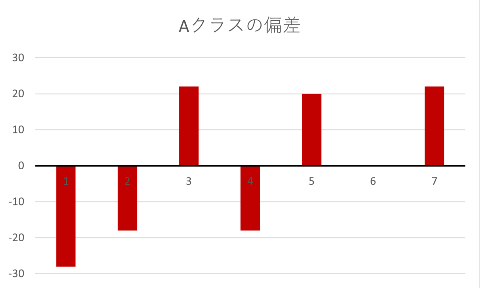
つまり，

$$-28,\quad -18,\quad 22,\quad -18,\quad 20,\quad 0,\quad 22$$

である．

例題 5-1　各データから平均値をひいたものを調べる

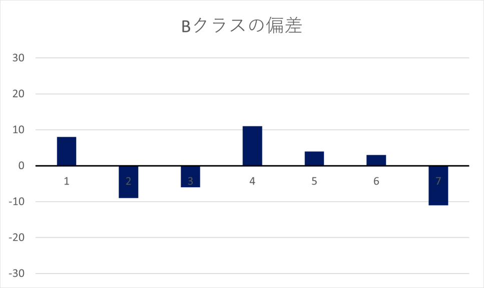
よって，A クラスの偏差についての棒グラフは下記のようになる．



A クラスの偏差についての棒グラフ

例題 5-1　各データから平均値をひいたものを調べる

また，B クラスの偏差についての棒グラフは下記のようになる（問題 5-1）．



B クラスの偏差についての棒グラフ

例題 5-2　データのばらつきの大きさをひとつの数値であらわす

例題 5-1 において，各クラスの偏差どうしを比較すると，A クラスの点数のほうが平均値 60 からのばらつきが大きいことがよくわかる．

例題 5-2　データのばらつきの大きさをひとつの数値であらわす

例題 5-1 において，各クラスの偏差どうしを比較すると，A クラスの点数のほうが平均値 60 からのばらつきが大きいことがよくわかる．

一方でこれは，数値の羅列どうしの比較であり，主観的な判断にすぎないともいえる．

例題 5-2　データのばらつきの大きさをひとつの数値であらわす

そこで，これら偏差の羅列をもっと単純にして，

　「ばらつきの大きさをあらわすひとつの数値」

にそれぞれ要約したいと考える．

例題 5-2　データのばらつきの大きさをひとつの数値であらわす

そこで，これら偏差の羅列をもっと単純にして，

　「ばらつきの大きさをあらわすひとつの数値」

にそれぞれ要約したいと考える．

つまり，偏差たちを「ひとつの数値」にまとめたい．

例題 5-2　データのばらつきの大きさをひとつの数値であらわす

ためしに，偏差の平均値をそれぞれ計算してみよう．

例題 5-2　データのばらつきの大きさをひとつの数値であらわす

ためしに，偏差の平均値をそれぞれ計算してみよう．

A クラスの点数については

$$\frac{(-28) + (-18) + 22 + (-18) + 20 + 0 + 22}{7} = \frac{0}{7} = 0$$

となる．

例題 5-2　データのばらつきの大きさをひとつの数値であらわす

ためしに，偏差の平均値をそれぞれ計算してみよう．

A クラスの点数については

$$\frac{(-28)+(-18)+22+(-18)+20+0+22}{7}=\frac{0}{7}=0$$

となる．

B クラスの点数についても偏差の平均値は 0 になることが確認できる（問題 5-2）．

例題 5-2　データのばらつきの大きさをひとつの数値であらわす

このように，偏差は 0 を中心にプラスマイナスにばらついているため，和をとると互いに打ち消しあい，合計は 0 になってしまう．つまり，偏差の平均値は 0 になってしまう．

例題 5-2　データのばらつきの大きさをひとつの数値であらわす

このように，偏差は 0 を中心にプラスマイナスにばらついているため，和をとると互いに打ち消しあい，合計は 0 になってしまう．つまり，偏差の平均値は 0 になってしまう．

そこで，プラスマイナスを全部プラスにするために，こんどは偏差を 2 乗してからそれらの平均値を計算してみよう．

例題5-2　データのばらつきの大きさをひとつの数値であらわす

A クラスの点数については

$$\frac{(-28)^2 + (-18)^2 + 22^2 + (-18)^2 + 20^2 + 0^2 + 22^2}{7} = 400$$

となる．

例題 5-2　データのばらつきの大きさをひとつの数値であらわす

偏差の 2 乗の平均値は，

　データのばらつきが大きい A クラスでは 400，

　データのばらつきが小さい B クラスでは 64　　（問題 5-3）

となる．これらは「ばらつきの大きさをあらわすひとつの数値」だといえる．

例題 5-2　データのばらつきの大きさをひとつの数値であらわす

偏差の 2 乗の平均値は，

　データのばらつきが大きい A クラスでは 400，

　データのばらつきが小さい B クラスでは 64　　（問題 5-3）

となる．これらは「ばらつきの大きさをあらわすひとつの数値」だといえる．

このような「偏差の 2 乗の平均値」のことを分散とよぶ．

例題 5-2　データのばらつきの大きさをひとつの数値であらわす

分散

偏差の 2 乗の平均値のことを分散とよぶ．

例題 5-3　分散を求める

1 組の学生における計算の小テストの点数

$$5,\ 6,\ 6,\ 4,\ 6,\ 5,\ 3,\ 5,\ 6,\ 4$$

についての分散を求めよう．

例題 5-3　分散を求める

まず，平均値を求めると，

$$\frac{5+6+6+4+6+5+3+5+6+4}{10} = 5$$

例題 5-3　分散を求める

まず，平均値を求めると，

$$\frac{5+6+6+4+6+5+3+5+6+4}{10} = 5$$

よって，偏差は

$$5-5,\quad 6-5,\quad 6-5,\quad 4-5,\quad 6-5,\quad 5-5,\quad 3-5,\quad 5-5,\quad 6-5,\quad 4-5$$

例題 5-3　分散を求める

つまり，

$$0,\quad 1,\quad 1,\quad -1,\quad 1,\quad 0,\quad -2,\quad 0,\quad 1,\quad -1$$

である．

例題 5-3　分散を求める

つまり，

$$0,\quad 1,\quad 1,\quad -1,\quad 1,\quad 0,\quad -2,\quad 0,\quad 1,\quad -1$$

である．よって，分散つまり「偏差の 2 乗の平均値」は，

$$\frac{0^2+1^2+1^2+(-1)^2+1^2+0^2+(-2)^2+0^2+1^2+(-1)^2}{10}=1$$

と計算され，1 である．

5.2　標準偏差

例題 5-4　標準偏差を求める

7 人の体重のデータ（単位：kg）

$$69,\ 63,\ 78,\ 81,\ 56,\ 83,\ 60$$

について，平均値を中心としてどれくらいの範囲でばらついているのかを調べたい．そのため,「標準的な偏差（標準的な平均値との差）」はどれくらいなのかを考えてみよう．

例題 5-4　標準偏差を求める

平均値は $70\ \mathrm{kg}$ であり，偏差は

$$69-70,\quad 63-70,\quad 78-70,\quad 81-70,\quad 56-70,\quad 83-70,\quad 60-70$$

例題 5-4　標準偏差を求める

平均値は $70\ \mathrm{kg}$ であり，偏差は

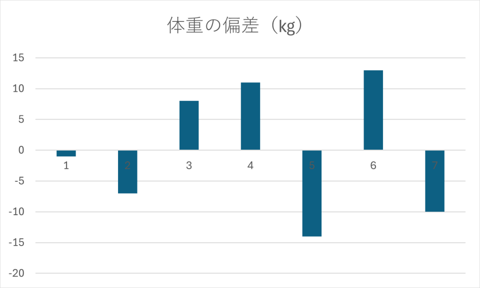
$$69-70,\quad 63-70,\quad 78-70,\quad 81-70,\quad 56-70,\quad 83-70,\quad 60-70$$

つまり，

$$-1,\quad -7,\quad 8,\quad 11,\quad -14,\quad 13,\quad -10$$

である．

例題 5-4　標準偏差を求める



体重の偏差についての棒グラフ

このように，偏差はプラスマイナス $10\ \mathrm{kg}$ 程度である．

例題 5-4　標準偏差を求める

ところが，分散（偏差^2 の平均値）は，

$$\frac{(-1)^2+(-7)^2+8^2+11^2+(-14)^2+13^2+(-10)^2}{7}=100$$

と計算され，$100\ \mathrm{kg}^2$ である．

例題 5-4　標準偏差を求める

この分散の値には次の問題点がある.

- 「標準的な偏差」とするには大きすぎる

例題 5-4　標準偏差を求める

この分散の値には次の問題点がある．

- 「標準的な偏差」とするには大きすぎる
- 単位が「kg^2」になってしまう

例題 5-4　標準偏差を求める

そこで，分散（単位込み）の正の平方根（$\sqrt{\ }$）をとってみると，

$$\sqrt{100\,\mathbf{kg}^2} = 10\,\mathbf{kg}$$

となる．こうすると，単位も元のデータと同じ「kg」に戻るし,「標準的な偏差」といっていい値になった．

例題 5-4　標準偏差を求める

そこで，分散（単位込み）の正の平方根（$\sqrt{\ }$）をとってみると，

$$\sqrt{100\,\mathbf{kg}^2} = 10\,\mathbf{kg}$$

となる．こうすると，単位も元のデータと同じ「kg」に戻るし,「標準的な偏差」といっていい値になった．

このような「分散の正の平方根」のことを標準偏差とよぶ．

例題 5-4　標準偏差を求める

標準偏差

$$\text{標準偏差} = \sqrt{\text{分散}}$$

この例の場合は，標準偏差は $10\ \mathrm{kg}$ になるということである．

例題 5-5　データを倍にしたとき標準偏差はどうなるかを調べる

5 つのデータ

$$7,\quad 10,\quad 13,\quad 11,\quad 9$$

について，各データを 3 倍したとき，平均値と標準偏差はそれぞれどのように変化するのか？

例題 5-5　データを倍にしたとき標準偏差はどうなるかを調べる

[元のデータの場合]

平均値は，

$$\frac{7+10+13+11+9}{5}=10$$

例題 5-5　データを倍にしたとき標準偏差はどうなるかを調べる

[元のデータの場合]

平均値は，

$$\frac{7+10+13+11+9}{5} = 10$$

よって，偏差は

$$7-10,\quad 10-10,\quad 13-10,\quad 11-10,\quad 9-10$$

例題 5-5　データを倍にしたとき標準偏差はどうなるかを調べる

つまり

$$-3,\ \ 0,\ \ 3,\ \ 1,\ \ -1$$

である．

例題 5-5　データを倍にしたとき標準偏差はどうなるかを調べる

つまり

$$-3,\ \ 0,\ \ 3,\ \ 1,\ \ -1$$

である．これより分散は，

$$\frac{(-3)^2+0^2+3^2+1^2+(-1)^2}{5}=4$$

例題 5-5　データを倍にしたとき標準偏差はどうなるかを調べる

つまり

$$-3,\quad 0,\quad 3,\quad 1,\quad -1$$

である．これより分散は，

$$\frac{(-3)^2+0^2+3^2+1^2+(-1)^2}{5}=4$$

よって，元のデータの標準偏差は $\sqrt{4}=2$ より，2 となる．

例題 5-5　データを倍にしたとき標準偏差はどうなるかを調べる

[各データを 3 倍したデータの場合]

平均値は，

$$\frac{21+30+39+33+27}{5}=\frac{150}{5}=30$$

例題 5-5　データを倍にしたとき標準偏差はどうなるかを調べる

[各データを 3 倍したデータの場合]

平均値は，

$$\frac{21+30+39+33+27}{5}=\frac{150}{5}=30$$

つまり，元のデータの平均値の 3 倍になることがわかる．

例題5-5　データを倍にしたとき標準偏差はどうなるかを調べる

[各データを 3 倍したデータの場合]

平均値は，

$$\frac{21+30+39+33+27}{5}=\frac{150}{5}=30$$

つまり，元のデータの平均値の 3 倍になることがわかる．偏差は

$$21-30,\quad 30-30,\quad 39-30,\quad 33-30,\quad 27-30$$

例題 5-5　データを倍にしたとき標準偏差はどうなるかを調べる

つまり

$$-9,\quad 0,\quad 9,\quad 3,\quad -3$$

である．

例題 5-5　データを倍にしたとき標準偏差はどうなるかを調べる

つまり

$$-9,\quad 0,\quad 9,\quad 3,\quad -3$$

である．これより分散は，

$$\frac{(-9)^2+0^2+9^2+3^2+(-3)^2}{5}=\frac{180}{5}=36$$

例題 5-5　データを倍にしたとき標準偏差はどうなるかを調べる

つまり

$$-9,\quad 0,\quad 9,\quad 3,\quad -3$$

である．これより分散は，

$$\frac{(-9)^2+0^2+9^2+3^2+(-3)^2}{5}=\frac{180}{5}=36$$

よって，標準偏差は $\sqrt{36}=6$ より，6 となり，元のデータの標準偏差の 3 倍になることがわかる．

例題 5-5　データを倍にしたとき標準偏差はどうなるかを調べる

どんなデータについてでも，各データを a 倍すると

平均値は元の平均値の a 倍になり，

標準偏差も元の標準偏差の a 倍になる．

例題 5-5　データを倍にしたとき標準偏差はどうなるかを調べる

どんなデータについてでも，各データを a 倍すると

　平均値は元の平均値の a 倍になり，

　標準偏差も元の標準偏差の a 倍になる．

単位をどのようにとるかにより，同じデータであっても標準偏差の値は異なってしまうことに注意しよう．

第6章　相関

6.1　共分散

例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

	計算テスト	漢字テスト
A	4	7
B	3	0
C	7	10
D	5	4
E	7	10
F	2	0
G	2	0
H	7	6
I	6	3
J	7	10

あるクラスの 10 人についての計算テストの点数と漢字テストの点数

例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

「片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にある」のか，

「片方の点数が高いともう片方の点数は低い傾向にある」のか，

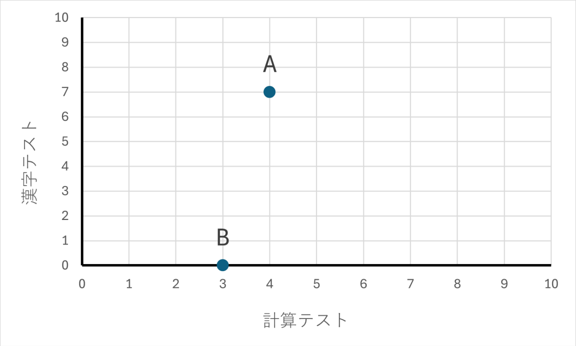
または，そのどちらの傾向もないのか？

例題6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

まずは，ひとりひとりの点数の組を点としてあらわし，グラフであらわすことによって視覚化してみよう．

計算テストの点数を横軸とし，漢字テストの点数を縦軸とする．このとき，たとえば，A の点数の組 $(4,7)$，および，B の点数の組 $(3,0)$ を点としてあらわすと，次のようになる．

例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる



計算テストの点数を横軸とし漢字テストの点数を縦軸とする散布図（A および B）

例題6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

このようなグラフのことを散布図という．つまり，散布図とは，2 つの変数のデータの組を座標平面上に点としてあらわしたグラフである．

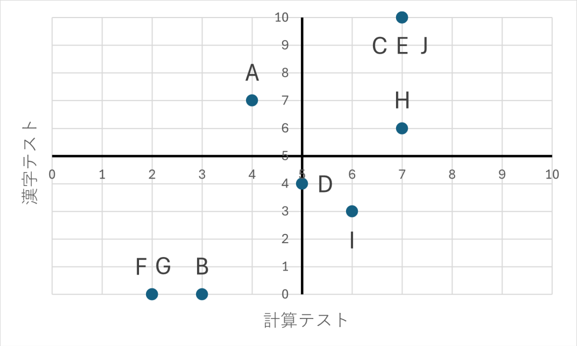
例題6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

なお，A, B, C, D, E, F, G, H, I, J のそれぞれの点数の組を点としてあらわした散布図において，

横軸における縦軸との交点 ： 「計算テストの点数の平均値 5」
縦軸における横軸との交点 ： 「漢字テストの点数の平均値 5」

とすると，次のようになる．

例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる



計算テストの点数を横軸とし漢字テストの点数を縦軸とする散布図

例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

散布図からは，ふたつのテストの間には右上がりの直線関係が強い，つまり，

「片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にある」

と判断できそうである．

例題6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

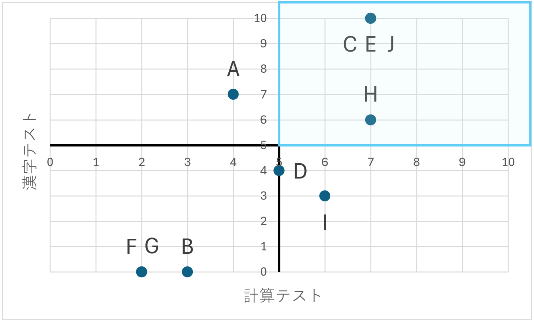
散布図からは，ふたつのテストの間には右上がりの直線関係が強い，つまり，

「片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にある」

と判断できそうである．このことは，次の点が多いと肯定できそうである．

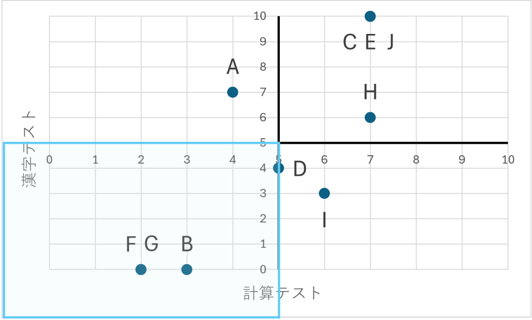
例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

「計算テストが平均点より上，漢字テストが平均点より上」である点（C, E, H, J），



例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

「計算テストが平均点より下，漢字テストが平均点より下」である点（B, F, G）



例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

ここで，偏差というのは「点数 $-$ 平均点」であり，

　平均点より上なら偏差の符号が $+$

　平均点より下なら偏差の符号が $-$

ということである．

例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

よって，どちらの場合についても（点 C, E, H, J でも，点 B, F, G でも）

「中間テストの偏差 × 期末テストの偏差」の符号が $+$

ということである．

例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

よって，どちらの場合についても（点 C, E, H, J でも，点 B, F, G でも）

「中間テストの偏差 $\times$ 期末テストの偏差」の符号が $+$

ということである．

実際，A, B, C, D, E, F, G, H, I, J の順にそれぞれ偏差を計算すると，次のようになることがわかる．

例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

	計算テスト偏差	漢字テスト偏差
A	-1	2
B	-2	-5
C	2	5
D	0	-1
E	2	5
F	-3	-5
G	-3	-5
H	2	1
I	1	-2
J	2	5

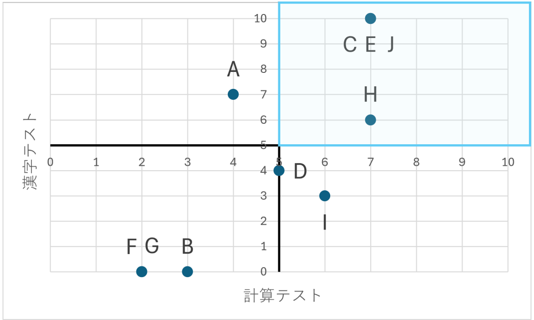
計算テストの点数の偏差と漢字テストの点数の偏差

例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

よって，以下が確認できる．

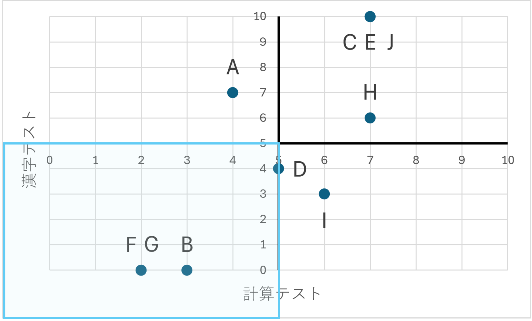
- 「中間テストの偏差 $\times$ 期末テストの偏差」の値が $+$ になるのは次である．

例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる



「計算テストが平均点より上，漢字テストが平均点より上」である C, E, H, J

例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる



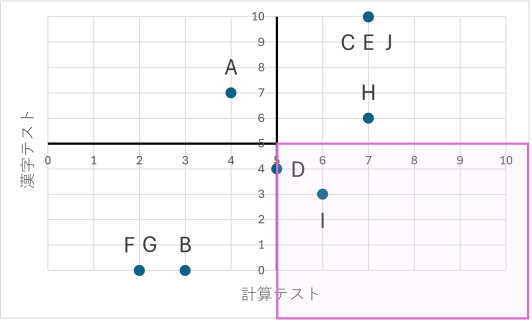
「計算テストが平均点より下，漢字テストが平均点より下」である B, F, G

例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

- 一方，「中間テストの偏差 × 期末テストの偏差」の値が $-$ になるのは次である．

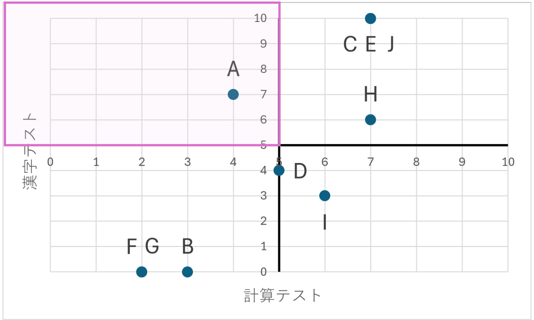
もしこのようなものが多かったら「片方の点数が高いともう片方の点数は低い傾向にある」ことを肯定できそう，ということになる．

例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる



「計算テストが平均点より上，漢字テストが平均点より下」である I

例題6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる



「計算テストが平均点より下，漢字テストが平均点より上」であるA

例題6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

以上より，各点における「計算テストの偏差 $\times$ 漢字テストの偏差」の値は $+$ になることが多いことが確認できた．

例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

以上より，各点における「計算テストの偏差 $\times$ 漢字テストの偏差」の値は $+$ になることが多いことが確認できた．

こんどは各点についての判断ではなく，全体的な傾向についての判断をしたい．

例題6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

そのため，これらの平均値，つまり，

「計算テストの偏差 × 期末テストの偏差」の平均値

をとってみると，

$$\frac{-2+10+10+0+10+15+15+2+(-2)+10}{10}=6.8$$

となり，$+$ の値になった．

例題6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

よって，どちらかというと，

「片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にある」

と考えられる可能性がある，ということになる．

例題6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

よって，どちらかというと，

「片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にある」

と考えられる可能性がある，ということになる．

この値（6.8）は共分散とよばれる．

例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

共分散

「片方の偏差 × もう片方の偏差」の平均値のことを共分散とよぶ.

例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

共分散

「片方の偏差 $\times$ もう片方の偏差」の平均値のことを共分散とよぶ．

共分散の符号を調べて，2 変数間における相関がどうなっているのかを考えることができる．

例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

相関

2 変数間における直線的な関係のことを相関という．

例題6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

相関

2変数間における直線的な関係のことを相関という．

「片方が大きいともう片方も大きい傾向にある」ときは「正の相関がある」という．

例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

相関

2 変数間における直線的な関係のことを相関という．

「片方が大きいともう片方も大きい傾向にある」ときは「正の相関がある」という．
「片方が大きいともう片方は小さい傾向にある」ときは「負の相関がある」という．

例題 6-1　片方のテストの点数が高いともう片方の点数も高い傾向にあるのかを調べる

一般に，共分散が $+$ の値になるときは正の相関があり，共分散が $-$ の値になるときは負の相関があると考えられる．

6.2　相関係数

例題 6-2　相関係数を求める

共分散の数値には，変数の単位のとり方によってその値が変わってしまうという問題がある．

例題 6-2　相関係数を求める

共分散の数値には，変数の単位のとり方によってその値が変わってしまうという問題がある．

そこで，共分散を「片方の標準偏差 $\times$ もう片方の標準偏差」で割ったものを計算することにする．そうすれば，単位によらない数値が得られ（無単位化でき），-1 から 1 の間に抑えることができるので，それを 2 変数間の相関の強さをあらわす数値としたい．

例題 6-2　相関係数を求める

共分散の数値には，変数の単位のとり方によってその値が変わってしまうという問題がある．

そこで，共分散を「片方の標準偏差 $\times$ もう片方の標準偏差」で割ったものを計算することにする．そうすれば，単位によらない数値が得られ（無単位化でき），-1 から 1 の間に抑えることができるので，それを 2 変数間の相関の強さをあらわす数値としたい．

このような数値のことを相関係数という．

例題 6-2　相関係数を求める

相関係数

$$相関係数 = \frac{共分散}{片方の標準偏差 \times もう片方の標準偏差}$$

例題 6-2　相関係数を求める

	計算テスト	漢字テスト
A	4	7
B	3	0
C	7	10
D	5	4
E	7	10
F	2	0
G	2	0
H	7	6
I	6	3
J	7	10

例題 6-1 のデータについて，計算テストの点数と漢字テストの点数の相関係数を求めたい．

例題 6-2　相関係数を求める

まず，各テストの標準偏差をそれぞれ計算しよう．偏差はこのようになることがわかっている．

	計算テスト偏差	漢字テスト偏差
A	-1	2
B	-2	-5
C	2	5
D	0	-1
E	2	5
F	-3	-5
G	-3	-5
H	2	1
I	1	-2
J	2	5

計算テストの点数の偏差と漢字テストの点数の偏差

例題 6-2　相関係数を求める

よって，計算テストの点数の分散（偏差の 2 乗の平均値）は

$$\frac{(-1)^2+(-2)^2+5^2+0^2+2^2+(-3)^2+(-3)^2+2^2+1^2+2^2}{10}=4$$

となる．

例題 6-2　相関係数を求める

よって，計算テストの点数の分散（偏差の 2 乗の平均値）は

$$\frac{(-1)^2+(-2)^2+5^2+0^2+2^2+(-3)^2+(-3)^2+2^2+1^2+2^2}{10}=4$$

となる．標準偏差は「分散の正の平方根（$\sqrt{\ }$）をとった値」なので，

$$\sqrt{4}=2$$

となる．

例題 6-2　相関係数を求める

同じように計算すると，漢字テストの点数の標準偏差は 4 となる（問題 6-7）．

例題 6-2　相関係数を求める

同じように計算すると，漢字テストの点数の標準偏差は 4 となる（問題 6-7）．

よって，

$$\text{相関係数} = \frac{\text{共分散}}{\text{片方の標準偏差} \times \text{もう片方の標準偏差}} = \frac{6.8}{2 \times 4} = 0.85$$

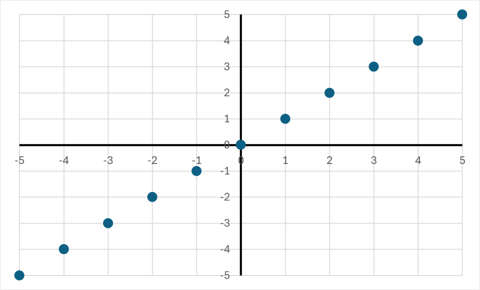
となる．

例題 6-2　相関係数を求める

相関係数は -1 から 1 までの値をとり，0 から 1 へ近づくほど正の相関が強くなり，0 から -1 へ近づくほど負の相関が強くなると考えられる．相関係数が 0 のときは，2 変数は無相関であるという．

例題 6-2　相関係数を求める

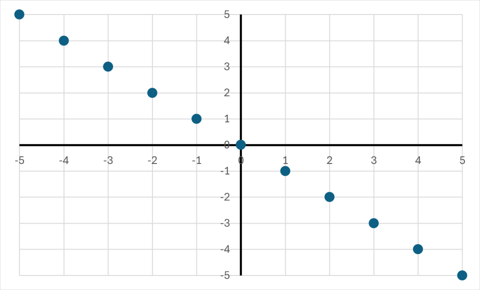
相関係数が 1 に近いと正の相関が強いといえる．



相関係数が 1 である 2 変数についての散布図

例題 6-2　相関係数を求める

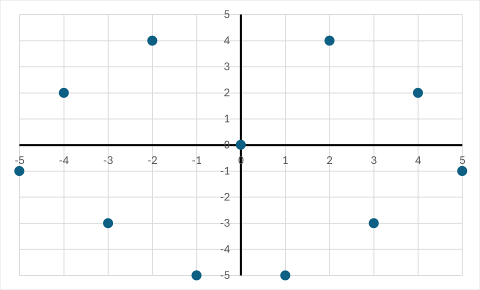
相関係数が -1 に近いと負の相関が強いといえる．



相関係数が -1 である 2 変数についての散布図

例題 6-2　相関係数を求める

相関係数が 0 に近いと直線的な関係が弱いといえる．



相関係数が 0 である 2 変数についての散布図

6.3　相関と因果関係

例題6-3　因果関係のないような相関もあることを理解する

	最高気温（℃）	ビールY の売上個数	アイスクリームH の売上個数
1日目	28	73	109
2日目	30	86	118
3日目	36	163	183
4日目	32	102	128
5日目	30	63	90
6日目	29	69	43
7日目	33	104	141
8日目	37	131	176
9日目	34	117	144
10日目	33	142	159
11日目	32	41	128
12日目	31	93	146
13日目	26	45	84
14日目	30	84	121

例題6-3　因果関係のないような相関もあることを理解する

このデータについて，最高気温とビールＹの売上個数の相関係数は約 0.80 になり，正の相関があることが確認できる．

例題6-3　因果関係のないような相関もあることを理解する

このデータについて，最高気温とビールＹの売上個数の相関係数は約 0.80 になり，正の相関があることが確認できる．

また，最高気温とアイスクリームＨの売上個数の相関係数は約 0.83 になり，こちらも正の相関があることが確認できる．

例題6-3　因果関係のないような相関もあることを理解する

これらより，

「最高気温が高いとビールＹの売上個数は大きい傾向にある」

「最高気温が高いとアイスクリームＨの売上個数は大きい傾向にある」

と考えることができる．

例題6-3　因果関係のないような相関もあることを理解する

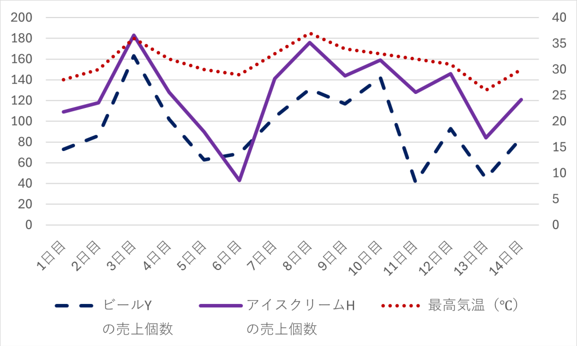
これらより，

「最高気温が高いとビールＹの売上個数は大きい傾向にある」

「最高気温が高いとアイスクリームＨの売上個数は大きい傾向にある」

と考えることができる．そして，最高気温が原因となり売上個数がその結果であるという因果関係を想定できる．

例題6-3　因果関係のないような相関もあることを理解する



最高気温，ビールＹの売上個数，アイスクリームＨの売上個数の折れ線グラフ

例題6-3　因果関係のないような相関もあることを理解する

さらに，ビール Y の売上個数とアイスクリーム H の売上個数の相関係数は約 0.78 になり，正の相関があることが確認できる．

例題 6-3　因果関係のないような相関もあることを理解する

さらに，ビール Y の売上個数とアイスクリーム H の売上個数の相関係数は約 0.78 になり，正の相関があることが確認できる．

これより，

「ビール Y の売上個数が大きいとアイスクリーム H の売上個数も大きい傾向にある」

と考えられる．

例題 6-3　因果関係のないような相関もあることを理解する

さらに，ビールＹの売上個数とアイスクリームＨの売上個数の相関係数は約 0.78 になり，正の相関があることが確認できる．

これより，

「ビールＹの売上個数が大きいとアイスクリームＨの売上個数も大きい傾向にある」

と考えられる．しかし，この場合は，ビールＹの売上個数が原因でアイスクリームＨの売上個数がその結果という因果関係を想定するにはむりがある．

例題6-3　因果関係のないような相関もあることを理解する

これについては，両者とも最高気温が原因となってデータが同じように変動しているので，そのせいで相関が生じていると考えるほうが自然である．

例題6-3　因果関係のないような相関もあることを理解する

これについては，両者とも最高気温が原因となってデータが同じように変動しているので，そのせいで相関が生じていると考えるほうが自然である．

このような，因果関係のないような相関は疑似相関といわれる．

例題6-3　因果関係のないような相関もあることを理解する

これについては，両者とも最高気温が原因となってデータが同じように変動しているので，そのせいで相関が生じていると考えるほうが自然である．

このような，因果関係のないような相関は疑似相関といわれる．

疑似相関は，この例のように，共通の要因によって生じている相関ということもありうるし，共通の要因さえも見当たらずまったく偶然に起こっている相関ということもありうる．

第 7 章　ベクトルの演算

7.1　ベクトルと行列

例題 7-1　ベクトルとは

たとえば，

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix} \quad や \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

のように，いくつかの数を一列に並べたものはベクトルとよばれる．

例題 7-1　ベクトルとは

ベクトル

数を縦一列に並べたものをベクトルという．並べ方の順序には意味がある．

例題 7-1　ベクトルとは

ベクトルを構成する数のことを成分といい，成分の個数を次数という．

例題 7-1　ベクトルとは

ベクトルを構成する数のことを成分といい，成分の個数を次数という．

成分が 2 つある（つまり次数が 2 である）ベクトルは $\mathbf{2}$ 次元ベクトル，成分が 3 つある（つまり次数が 3 である）ベクトルは $\mathbf{3}$ 次元ベクトルともよばれる．

例題 7-1　ベクトルとは

たとえば，$\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$ は 2 次元ベクトルであり，$\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$ は 3 次元ベクトルである．

例題 7-1　ベクトルとは

たとえば，$\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \end{pmatrix}$ は 2 次元ベクトルであり，$\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$ は 3 次元ベクトルである．

なお，成分がすべて 0 であるベクトルのことをゼロベクトルとよび，$\mathbf{0}$ と書くこともある．

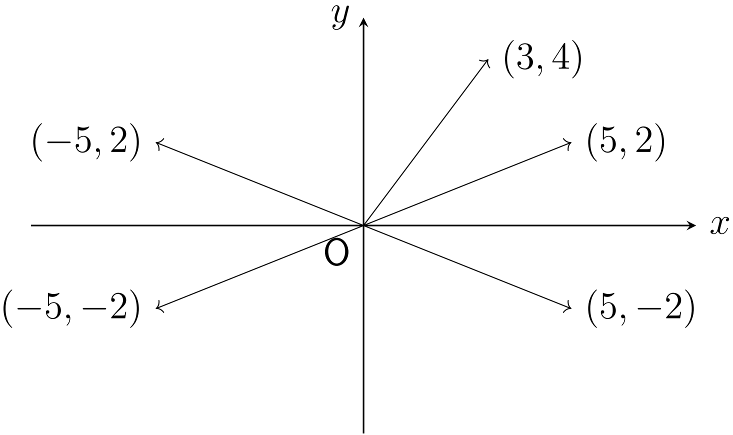
例題 7-2　ベクトルを図示する

たとえば，2 次元ベクトル

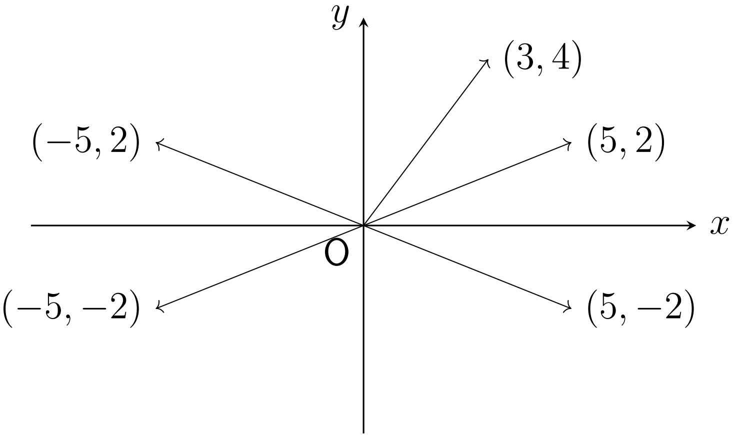
$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

は次のように図示できる．

例題 7-2　ベクトルを図示する



例題 7-2　ベクトルを図示する



ベクトルは「大きさ」と「向き」をもったものと考えることもできる．

例題 7-3　ベクトルの大きさを求める

ベクトルを図示した際の「矢印の長さ」はベクトルの大きさといわれる．

例題7-3　ベクトルの大きさを求める

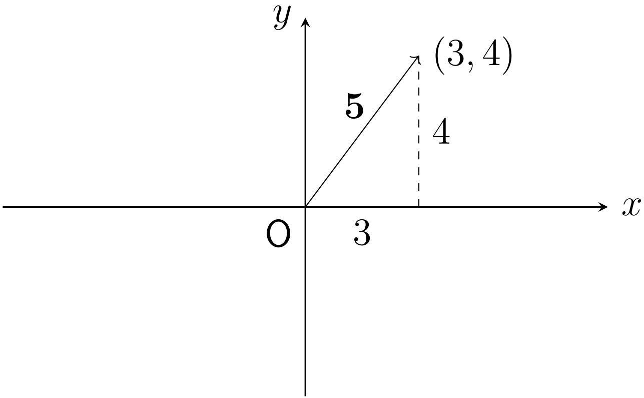
ベクトルを図示した際の「矢印の長さ」はベクトルの大きさといわれる．たとえば，

$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ の大きさは

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5,$$

というように，三平方の定理により求められる．

例題 7-3　ベクトルの大きさを求める



例題 7-3　ベクトルの大きさを求める

一般に，2 次元ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の大きさは $\sqrt{x^2+y^2}$ で求められる．

例題 7-3　ベクトルの大きさを求める

一般に，2 次元ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の大きさは $\sqrt{x^2+y^2}$ で求められる．

ほかにもたとえば，次のように計算される．

例題 7-3　ベクトルの大きさを求める

$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ の大きさは $\sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$,

$\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ の大きさは $\sqrt{(-5)^2 + 2^2} = \sqrt{29}$,

$\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ の大きさは $\sqrt{(-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$,

$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ の大きさは $\sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

例題 7-4　行列とは

行列

数を長方形型に並べたものを行列という．並べ方の順序には意味がある．

例題 7-4　行列とは

行列

数を長方形型に並べたものを行列という．並べ方の順序には意味がある．

横の並びを行とよび，縦の並びを列とよぶ．

例題 7-4　行列とは

たとえば，

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

は 2 行と 3 列からなっている行列である．

例題 7-4　行列とは

たとえば，

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

は 2 行と 3 列からなっている行列である．

$\mathbf{2}$ 行 $\mathbf{3}$ 列の行列，$\mathbf{(2,3)}$ 行列，または，$\mathbf{2 \times 3}$ 行列 などとよばれる．

例題 7-4　行列とは

たとえば，

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

は 2 行と 3 列からなっている行列である．

$\mathbf{2}$ 行 $\mathbf{3}$ 列の行列，$\mathbf{(2,3)}$ 行列，または，$\mathbf{2 \times 3}$ 行列 などとよばれる．

行列を構成する行数と列数の対は型といわれる．そして，2 つの行列について，行数も互いに等しくて，列数も互いに等しいとき，それらは同じ型であるといわれる．

例題 7-4　行列とは

行列を構成する数のことを成分という.

例題 7-4　行列とは

行列を構成する数のことを成分という．
第 1 行と第 1 列の交差点にある成分をその行列の $(1,1)$ 成分，第 1 行と第 2 列の交差点にある成分をその行列の $(1,2)$ 成分，$\cdots$ とよぶ．

例題 7-4　行列とは

行列を構成する数のことを成分という．
第 1 行と第 1 列の交差点にある成分をその行列の $(1,1)$ 成分，第 1 行と第 2 列の交差点にある成分をその行列の $(1,2)$ 成分，$\cdots$ とよぶ．

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

について

$(1,1)$ 成分は 11 ,　$(1,2)$ 成分は 12 ,　$(1,3)$ 成分は 13 ,
$(2,1)$ 成分は 21 ,　$(2,2)$ 成分は 22 ,　$(2,3)$ 成分は 23

である．

例題 7-4　行列とは

ベクトルは行列の特別な場合である.

例題 7-4　行列とは

ベクトルは行列の特別な場合である．

たとえば，$\begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 31 \end{pmatrix}$ は 3 行 1 列の行列とみなせる．

例題 7-4　行列とは

行数と列数が同じである行列は正方行列といわれる．

例題 7-4　行列とは

行数と列数が同じである行列は正方行列といわれる．

2 行 2 列の行列は 2 次の正方行列，3 行 3 列の行列は 3 次の正方行列ともよばれる．

例題 7-4　行列とは

行数と列数が同じである行列は正方行列といわれる．

2 行 2 列の行列は 2 次の正方行列，3 行 3 列の行列は 3 次の正方行列ともよばれる．

とくに，対角成分（左上から右下までの対角線上にある成分）が 1 で，それ以外の成分が 0 である正方行列は単位行列といわれ，I とあらわされることがある．

例題 7-4　行列とは

n 行 n 列の単位行列は n 次の単位行列とよばれ，I_n のようにあらわされることもある．

例題 7-4　行列とは

n 行 n 列の単位行列は n 次の単位行列とよばれ，I_n のようにあらわされることもある．たとえば，

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ は 2 次の単位行列，

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ は 3 次の単位行列である．

例題 7-5　行列の型，各成分を答える

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 100 & 200 \end{pmatrix}$$

は 2 行 2 列の行列（2 次の正方行列）であり，

$(1,1)$ 成分は 10 ，　$(1,2)$ 成分は 20,

$(2,1)$ 成分は 100 ，　$(2,2)$ 成分は 200

である．

例題 7-5　行列の型，各成分を答える

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 100 & 200 \\ 1000 & 2000 \end{pmatrix}$$

は 3 行 2 列の行列であり，

$(1,1)$ 成分は 10 ，　$(1,2)$ 成分は 20,

$(2,1)$ 成分は 100 ，　$(2,2)$ 成分は 200

$(3,1)$ 成分は 1000 ，　$(3,2)$ 成分は 2000

である．

7.2　ベクトルの和とスカラー倍

例題 7-6　ベクトルの和を求める

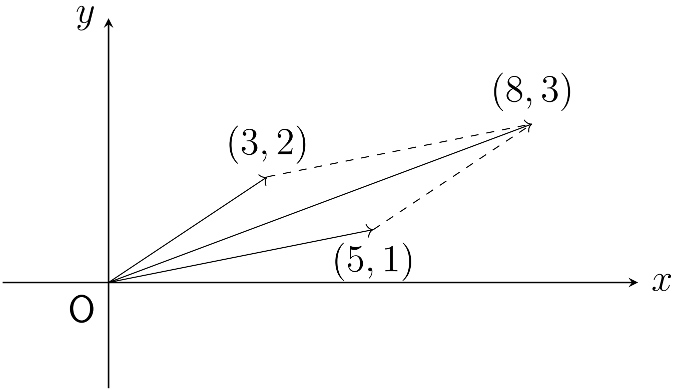
ふたつのベクトルの次数が同じとき，ベクトルの和は，対応する成分どうしの和をとることによって計算される．

例題 7-6　ベクトルの和を求める

ふたつのベクトルの次数が同じとき，ベクトルの和は，対応する成分どうしの和をとることによって計算される．

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+5 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

例題 7-6　ベクトルの和を求める



例題 7-7　ベクトルのスカラー倍を求める

ベクトルのスカラー倍は，各成分をスカラー倍することによって計算される．

例題 7-7　ベクトルのスカラー倍を求める

ベクトルのスカラー倍は，各成分をスカラー倍することによって計算される．

$$2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times 3\\2\times 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix},\qquad 3\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times 5\\3\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\3\end{pmatrix}$$

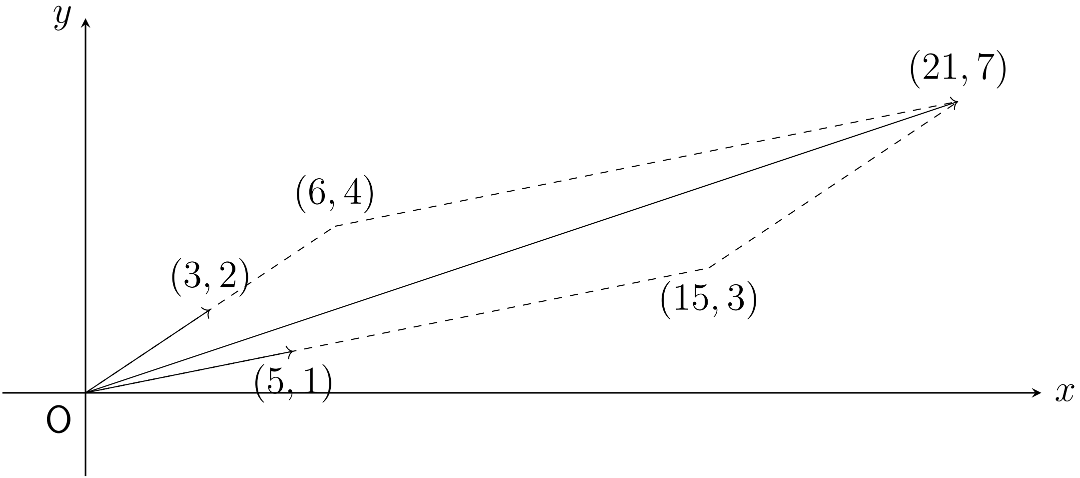
例題 7-7　ベクトルのスカラー倍を求める

また，

$$2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}15\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+15\\4+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21\\7\end{pmatrix}$$

と計算される．

例題 7-7　ベクトルのスカラー倍を求める



例題 7-7　ベクトルのスカラー倍を求める

スカラー

スカラーとは，ベクトルに対して，ひとつひとつの数のことをいう．

例題 7-7　ベクトルのスカラー倍を求める

上記では，$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ はベクトルであり，2，3 はスカラーである．

例題 7-7　ベクトルのスカラー倍を求める

上記では，$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ はベクトルであり，2，3 はスカラーである．

なお，たとえば，$(-1)\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ を $-\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ とも書く．

例題 7-8　ベクトルの差を求める

次数が同じベクトル a，b に対し，ベクトルの差を $a - b = a + (-b)$ によって，つまり，対応する成分どうしの差によって計算する．

例題 7-8　ベクトルの差を求める

次数が同じベクトル a，b に対し，ベクトルの差を $a - b = a + (-b)$ によって，つまり，対応する成分どうしの差によって計算する．

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{5} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(- \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + (-5) \\ 2 + (-1) \end{pmatrix} \boldsymbol{=} \begin{pmatrix} \mathbf{3 - 5} \\ \mathbf{2 - 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

7.3　ベクトルの内積

例題 7-9　ベクトルの内積を求める

ふたつのベクトルの次数が同じとき，ベクトルの内積は，同じ行の成分どうしをそれぞれかけてたすことによって計算される．

例題 7-9　ベクトルの内積を求める

ふたつのベクトルの次数が同じとき，ベクトルの内積は，同じ行の成分どうしをそれぞれかけてたすことによって計算される．

ベクトル a とベクトル b の内積を $a \cdot b$ と書く．

例題 7-9　ベクトルの内積を求める

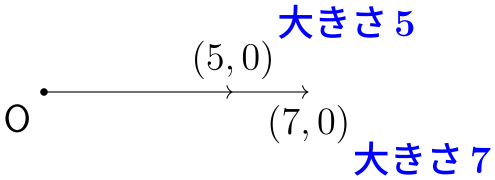
ふたつのベクトルの次数が同じとき，ベクトルの内積は，同じ行の成分どうしをそれぞれかけてたすことによって計算される．

ベクトル a とベクトル b の内積を $a \cdot b$ と書く．

内積はベクトルではなく「数」であることに注意しよう．

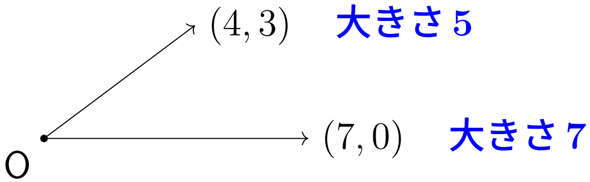
例題 7-9　ベクトルの内積を求める

$$\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix} = 5\times 7 + 0\times 0 = 35$$



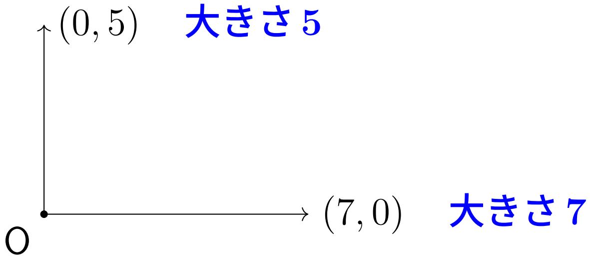
例題 7-9　ベクトルの内積を求める

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \times 7 + 3 \times 0 = 28$$



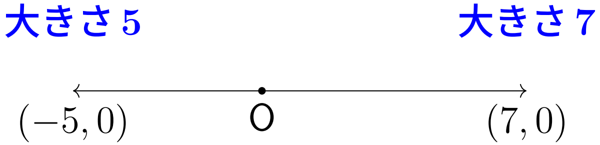
例題 7-9　ベクトルの内積を求める

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \times 7 + 5 \times 0 = 0$$



例題 7-9　ベクトルの内積を求める

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} = -5 \times 7 + 0 \times 0 = -35$$



例題 7-9　ベクトルの内積を求める

内積

ベクトル a, b の内積 $a \cdot b$ をベクトルの成分を使って計算するには，a, b の同じ行の成分どうしをそれぞれかけて，すべてたす．

例題 7-9　ベクトルの内積を求める

上記の 4 つの例については,「向き」がちがうほど値が小さくなっていき，それらの「向き」が真逆のときにもっとも小さくなる．

例題 7-9　ベクトルの内積を求める

上記の 4 つの例については,「向き」がちがうほど値が小さくなっていき，それらの「向き」が真逆のときにもっとも小さくなる.

また，直交するときは値が 0 になっている.

一般に，2 つのベクトルが直交するときは内積が 0 になり，また逆に，内積が 0 になるような 2 つのベクトルは直交する.

例題 7-9　ベクトルの内積を求める

直交性

ベクトル a, b が直交するとは，それらの内積 $a \cdot b$ が 0 になることをいう．

例題 7-10　直交するベクトルを求める

2 次元ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ と直交する 2 次元ベクトルをひとつ求めてみよう（ただし，ゼロベクトルは除く）．

例題 7-10　直交するベクトルを求める

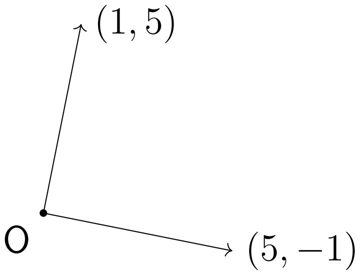
2 次元ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ と直交する 2 次元ベクトルをひとつ求めてみよう（ただし，ゼロベクトルは除く）．

たとえば，

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \times 5 + 5 \times (-1) = 0$$

となるので，$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ は求めるベクトルである．

例題 7-10　直交するベクトルを求める



$\boxed{\text{内積}\,0}$

第 8 章　行列の演算

8.1　行列の和とスカラー倍

例題 8-1　行列の和を求める

ふたつの行列が同じ型であるとき，行列の和は，対応する成分どうしの和によって計算される．

例題 8-1　行列の和を求める

ふたつの行列が同じ型であるとき，行列の和は，対応する成分どうしの和によって計算される．

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+1 & 20+2 & 30+3 \\ 40+4 & 50+5 & 60+6 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 44 & 55 & 66 \end{pmatrix}$$

例題 8-1　行列の和を求める

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 2+(-2) \\ 3+(-3) & 4+(-4) \\ 5+(-5) & 6+(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例題 8-2　指定された型のゼロ行列を求める

すべての成分が 0 である行列はゼロ行列とよばれ，0 または O と書かれる．

例題 8-2　指定された型のゼロ行列を求める

すべての成分が 0 である行列はゼロ行列とよばれ，0 または O と書かれる．

$$O_2 = O_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad O_{1,5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このように，行列の型を O に付記することもある．

例題 8-3　行列のスカラー倍を求める

行列のスカラー倍は，成分をそれぞれスカラー倍することによって計算される．

例題 8-3　行列のスカラー倍を求める

$$10\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\times 1 & 10\times 2 & 10\times 3\\ 10\times 4 & 10\times 5 & 10\times 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10 & 20 & 30\\ 40 & 50 & 60\end{pmatrix},$$

$$-3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\times 1 & -3\times 2\\ -3\times 3 & -3\times 4\\ -3\times 5 & -3\times 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & -6\\ -9 & -12\\ -15 & -18\end{pmatrix}$$

例題 8-3　行列のスカラー倍を求める

$$10\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\times 1 & 10\times 2 & 10\times 3\\10\times 4 & 10\times 5 & 10\times 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 20 & 30\\40 & 50 & 60\end{pmatrix},$$

$$-3\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\times 1 & -3\times 2\\-3\times 3 & -3\times 4\\-3\times 5 & -3\times 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -6\\-9 & -12\\-15 & -18\end{pmatrix}$$

なお一般に，行列 A に対して，$(-1)A$ を $-A$ とも書く．

例題 8-4　行列の差を求める

同じ型の行列 A，B に対し，行列の差を $A - B = A + (-B)$ によって，つまり，対応する成分どうしの差によって計算する．

例題 8-4　行列の差を求める

同じ型の行列 A，B に対し，行列の差を $A-B=A+(-B)$ によって，つまり，対応する成分どうしの差によって計算する．

$$
\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10-1 & 20-2 & 30-3 \\ 40-4 & 50-5 & 60-6 \end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix} 9 & 18 & 27 \\ 36 & 45 & 54 \end{pmatrix}
$$

例題 8-4　行列の差を求める

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-1) & 2-(-2) \\ 3-(-3) & 4-(-4) \\ 5-(-5) & 6-(-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

8.2　行列の積

例題8-5　2行2列の行列と2行1列の行列の積を求める

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \times 1 + 12 \times 2 \\ 21 \times 1 + 22 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 65 \end{pmatrix}$$

(i) $(\mathbf{2},\ 2)$行列と$(2,\ \mathbf{1})$行列の積は$(\mathbf{2},\ \mathbf{1})$行列になる．

例題 8-5　2 行 2 列の行列と 2 行 1 列の行列の積を求める

$$\begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ 21 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{11} \times \mathbf{1} + \mathbf{12} \times \mathbf{2} \\ 21 \times 1 + 22 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{35}} \\ 65 \end{pmatrix}$$

(ii) 積の $(1,\ 1)$ 成分は,「左の行列の 1 行目 $\begin{pmatrix} 11 & 12 \end{pmatrix}$」と「右の行列の 1 列目 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$」について，対応する成分どうしの積の和をとって求める.

例題 8-5　2 行 2 列の行列と 2 行 1 列の行列の積を求める

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ \mathbf{21} & \mathbf{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \times 1 + 12 \times 2 \\ \mathbf{21} \times \mathbf{1} + \mathbf{22} \times \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ \boxed{\mathbf{65}} \end{pmatrix}$$

(iii) 積の $(\mathbf{2}, \mathbf{1})$ 成分は,「左の行列の **2 行**目 $\begin{pmatrix} 21 & 22 \end{pmatrix}$」と「右の行列の **1 列**目 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$」について，対応する成分どうしの積の和をとって求める．

例題8-5　2行2列の行列と2行1列の行列の積を求める

このように，行列の積を求めるときは，左の行列からは「行」，右の行列からは「列」を取り出して，それらの積和を計算している．

例題8-5　2行2列の行列と2行1列の行列の積を求める

このように，行列の積を求めるときは，左の行列からは「行」，右の行列からは「列」を取り出して，それらの積和を計算している．

つまり，積 AB の (m,n) 成分は,「A の m 行目」と「B の n 列目」を取り出して，それらの積和を計算したものである．

例題 8-6　2 行 3 列の行列と 3 行 1 列の行列の積を求める

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \times 1 + 12 \times 2 + 13 \times 3 \\ 21 \times 1 + 22 \times 2 + 23 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 \\ 134 \end{pmatrix}$$

(i) $(2,\ 3)$ 行列と $(3,\ 1)$ 行列の積は $(2,\ 1)$ 行列になる.

例題8-6　2行3列の行列と3行1列の行列の積を求める

$$\begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{12} & \mathbf{13} \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{11} \times \mathbf{1} + \mathbf{12} \times \mathbf{2} + \mathbf{13} \times \mathbf{3} \\ 21 \times 1 + 22 \times 2 + 23 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{74} \\ 134 \end{pmatrix}$$

(ii) 積の $(1, 1)$ 成分は,「左の行列の1行目 $\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \end{pmatrix}$」と「右の行列の1列目 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$」について，対応する成分どうしの積の和をとって求める.

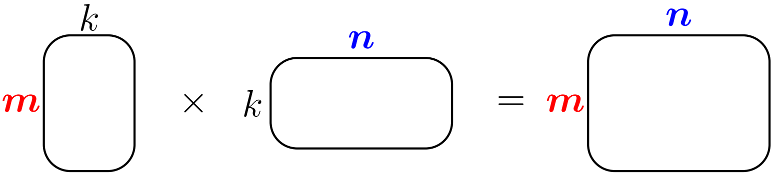
例題8-6　2行3列の行列と3行1列の行列の積を求める

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ \mathbf{21} & \mathbf{22} & \mathbf{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \times 1 + 12 \times 2 + 13 \times 3 \\ \mathbf{21} \times \mathbf{1} + \mathbf{22} \times \mathbf{2} + \mathbf{23} \times \mathbf{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 \\ \boxed{\mathbf{134}} \end{pmatrix}$$

(iii) 積の (2, 1) 成分は,「左の行列の 2 行目 $\begin{pmatrix} 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$」と「右の行列の 1 列目 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$」について，対応する成分どうしの積の和をとって求める.

例題 8-6　2 行 3 列の行列と 3 行 1 列の行列の積を求める

一般に，左の行列の列数と右の行列の行数が一致するときのみ積が求められる．



$(\boldsymbol{m}, k)$ 行列と $(k, \boldsymbol{n})$ 行列の積は $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$ 行列になる

いつでも積が定義されるわけではないことに注意しよう．

例題 8-7　行列の積が定義されない例を考える

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$(2, 3)$ 行列と $(2, 1)$ 行列の積は定義されない．左の行列の列数「3」と右の行列の行数「2」が一致しないからである．

例題 8-7　行列の積が定義されない例を考える

実際，むりやり計算しようとしても，

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \underset{\text{計算できない}}{\overset{?}{=\!=\!=}} \begin{pmatrix} 11 \times 1 + 12 \times 2 + 13 \times ? \\ 21 \times 1 + 22 \times 2 + 23 \times ? \end{pmatrix}$$

というように，うまくいかない．

例題 8-8　2 行 2 列の行列どうしの積を求める

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \times 1 + 12 \times 2 & 11 \times 3 + 12 \times 4 \\ 21 \times 1 + 22 \times 2 & 21 \times 3 + 22 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 81 \\ 65 & 151 \end{pmatrix}$$

(i) $(\mathbf{2}, 2)$ 行列と $(2, \mathbf{2})$ 行列の積は $(\mathbf{2}, \mathbf{2})$ 行列になる.

例題 8-8　2 行 2 列の行列どうしの積を求める

$$\begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ 21 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 \\ \mathbf{2} & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{11} \times \mathbf{1} + \mathbf{12} \times \mathbf{2} & 11 \times 3 + 12 \times 4 \\ 21 \times 1 + 22 \times 2 & 21 \times 3 + 22 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\mathbf{35}} & 81 \\ 65 & 151 \end{pmatrix}$$

(ii) 積の $(1, 1)$ 成分は,「左の行列の 1 行目 $\begin{pmatrix} 11 & 12 \end{pmatrix}$」と「右の行列の 1 列目 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$」について, 対応する成分どうしの積の和をとって求める.

例題8-8　2行2列の行列どうしの積を求める

$$\begin{pmatrix} \mathbf{11} & \mathbf{12} \\ 21 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{3} \\ 2 & \mathbf{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \times 1 + 12 \times 2 & \mathbf{11} \times \mathbf{3} + \mathbf{12} \times \mathbf{4} \\ 21 \times 1 + 22 \times 2 & 21 \times 3 + 22 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & \boxed{\mathbf{81}} \\ 65 & 151 \end{pmatrix}$$

(iii) 積の $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ 成分は,「左の行列の **1 行**目 $\begin{pmatrix} 11 & 12 \end{pmatrix}$」と「右の行列の **2 列**目 $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$」について，対応する成分どうしの積の和をとって求める.

例題 8-8　2 行 2 列の行列どうしの積を求める

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ \mathbf{21} & \mathbf{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 3 \\ \mathbf{2} & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11\times 1 + 12\times 2 & 11\times 3 + 12\times 4 \\ \mathbf{21}\times\mathbf{1} + \mathbf{22}\times\mathbf{2} & 21\times 3 + 22\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 81 \\ \boxed{\mathbf{65}} & 151 \end{pmatrix}$$

(iv) 積の $(\mathbf{2}, \mathbf{1})$ 成分は，「左の行列の **2 行**目 $\begin{pmatrix} 21 & 22 \end{pmatrix}$」と「右の行列の **1 列**目 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$」について，対応する成分どうしの積の和をとって求める．

例題 8-8　2 行 2 列の行列どうしの積を求める

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ \mathbf{21} & \mathbf{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{3} \\ 2 & \mathbf{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \times 1 + 12 \times 2 & 11 \times 3 + 12 \times 4 \\ 21 \times 1 + 22 \times 2 & \mathbf{21} \times \mathbf{3} + \mathbf{22} \times \mathbf{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 81 \\ 65 & \boxed{151} \end{pmatrix}$$

(v) 積の $(2, 2)$ 成分は,「左の行列の 2 行目 $\begin{pmatrix} 21 & 22 \end{pmatrix}$」と「右の行列の 2 列目 $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$」について，対応する成分どうしの積の和をとって求める．

例題 8-8　2 行 2 列の行列どうしの積を求める

例題 8-8 と問題 8-8 より

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}$$

例題 8-8　2 行 2 列の行列どうしの積を求める

例題 8-8 と問題 8-8 より

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}$$

このように，行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ において，積 $\boldsymbol{AB}$，積 $\boldsymbol{BA}$ が定義されたとしても，一般には交換法則 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ は成立しない．

例題 8-8　2 行 2 列の行列どうしの積を求める

例題 8-8 と問題 8-8 より

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}$$

このように，行列 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ において，積 $\boldsymbol{AB}$，積 $\boldsymbol{BA}$ が定義されたとしても，一般には交換法則 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$ は成立しない．

また，積 $\boldsymbol{AB}$ が定義されても，積 $\boldsymbol{BA}$ はかならずしも定義されないことにも注意しよう．

例題 8-9　単位行列との積を求める

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \times 1 + 12 \times 0 & 11 \times 0 + 12 \times 1 \\ 21 \times 1 + 22 \times 0 & 21 \times 0 + 22 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}$$

例題 8-9　単位行列との積を求める

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \times 1 + 12 \times 0 & 11 \times 0 + 12 \times 1 \\ 21 \times 1 + 22 \times 0 & 21 \times 0 + 22 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}$$

問題 8-9 より

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}$$

例題 8-9　単位行列との積を求める

よって，行列 $\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}$ に単位行列を左右どちらからかけても不変である．

例題 8-9　単位行列との積を求める

よって，行列 $\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}$ に単位行列を左右どちらからかけても不変である．

このことは，一般にも成り立つ．

例題 8-9　単位行列との積を求める

乗法単位元

どの行列 A に対しても，次が成り立つ（積が定義できる場合）．

$$AI = A, \qquad IA = A$$

ここで，I は単位行列である．

例題 8-10　ゼロ行列との積を求める

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \times 0 + 12 \times 0 & 11 \times 0 + 12 \times 0 \\ 21 \times 0 + 22 \times 0 & 21 \times 0 + 22 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例題 8-10　ゼロ行列との積を求める

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \times 0 + 12 \times 0 & 11 \times 0 + 12 \times 0 \\ 21 \times 0 + 22 \times 0 & 21 \times 0 + 22 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 8-10 より

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例題 8-10　ゼロ行列との積を求める

よって，行列 $\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}$ にゼロ行列を左右どちらからかけても O になる．

例題 8-10　ゼロ行列との積を求める

よって，行列 $\begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}$ にゼロ行列を左右どちらからかけても O になる．

このことは，一般にも成り立つ．

例題 8-10　ゼロ行列との積を求める

乗法吸収元

どの行列 A に対しても，次が成り立つ（積が定義できる場合）．

$$AO = O, \qquad OA = O$$

ここで，O はゼロ行列である．

例題 8-11　行列の積が定義されるかどうかを確認する

(1) $\begin{pmatrix} 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

積が定義される　**(**$(1,2)$ **型** $\times (2,2)$ **型** $= (1,2)$ **型)**

例題 8-11　行列の積が定義されるかどうかを確認する

(1) $\begin{pmatrix} 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

積が定義される　**(**$(1,2)$ **型** $\times (2,2)$ **型** $= (1,2)$ **型)**

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \times 1 + 12 \times 2 & 11 \times 3 + 12 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 81 \end{pmatrix}$$

例題 8-11　行列の積が定義されるかどうかを確認する

(2) $\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

積は定義されない　($(1, 3)$ 行列と $(2, 2)$ 行列の積は定義されない)

例題 8-11　行列の積が定義されるかどうかを確認する

(3) $\begin{pmatrix} 11 \\ 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

積が定義される　（$(2,1)$ 型 $\times (1,2)$ 型 $= (2,2)$ 型）

例題 8-11　行列の積が定義されるかどうかを確認する

(3) $\begin{pmatrix} 11 \\ 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$

積が定義される　**(**$(2,1)$ **型** $\times (1,2)$ **型** $= (2,2)$ **型)**

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \times 1 & 11 \times 2 \\ 21 \times 1 & 21 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ 21 & 42 \end{pmatrix}$$

例題 8-11　行列の積が定義されるかどうかを確認する

(4) $\begin{pmatrix} 11 \\ 21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

積は定義されない　（$(2,1)$ 行列と $(2,2)$ 行列の積は定義されない）

例題 8-11　行列の積が定義されるかどうかを確認する

(5) $\begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

積が定義される　(($3, 1$) 型 $\times$ ($1, 3$) 型 $=$ ($3, 3$) 型)

例題 8-11　行列の積が定義されるかどうかを確認する

(5) $\begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

積が定義される　$((3,1)$ 型 $\times (1,3)$ 型 $= (3,3)$ 型$)$

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \times 1 & 11 \times 2 & 11 \times 3 \\ 21 \times 1 & 21 \times 2 & 21 \times 3 \\ 31 \times 1 & 31 \times 2 & 31 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 22 & 33 \\ 21 & 42 & 63 \\ 31 & 62 & 93 \end{pmatrix}$$

例題 8-11　行列の積が定義されるかどうかを確認する

(6) $\begin{pmatrix} 11 \\ 21 \\ 31 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

積は定義されない　（$(3,1)$ 行列と $(2,3)$ 行列の積は定義されない）

第 9 章　多項式関数

9.1　多項式関数とは

例題 9-1　関数とは

1000 円をもって買い物に行って，x 円使ったときの残りのお金を y 円とするとき

$$y = 1000 - x \quad \text{ただし} \quad 0 \leq x \leq 1000$$

という関係式が成立する．

例題 9-1　関数とは

この式 $y = 1000 - x$ において，$0 \leq x \leq 1000$ の範囲で x を決めると，それに対応して y の値がひとつに定まるので，y は x の関数である（定義域は集合 $\{\, x \mid 0 \leq x \leq 1000 \}$ ）．

例題 9-1　関数とは

関数とは

ある集合 A のどの元 x に対しても，集合 B のあるひとつの値 y が対応しているとき，その対応のことを関数とよぶ（A 上の関数，または，A から B への関数ともいう）．

例題 9-1　関数とは

関数とは

ある集合 A のどの元 x に対しても，集合 B のあるひとつの値 y が対応しているとき，その対応のことを関数とよぶ（A 上の関数，または，A から B への関数ともいう）．

またこのとき，y は x の関数であるという．変数 x は独立変数，x に応じて決まる変数 y は従属変数とよばれる．

例題 9-1　関数とは

関数とは

ある集合 A のどの元 x に対しても，集合 B のあるひとつの値 y が対応しているとき，その対応のことを関数とよぶ（A 上の関数，または，A から B への関数ともいう）．

またこのとき，y は x の関数であるという．変数 x は独立変数，x に応じて決まる変数 y は従属変数とよばれる．

集合 A のことを定義域，集合 B のことを終域という．

例題 9-1　関数とは

y が x の関数であるとき，関数を f などであらわし，

$$y = f(x)$$

と書く．

例題 9-1　関数とは

y が x の関数であるとき，関数を f などであらわし，

$$y = f(x)$$

と書く．そして，$y = f(x)$ で定まる関数 f について，$x = a$ を代入したときに対応する y の値を $f(a)$ とあらわす．

例題 9-1　関数とは

たとえば,

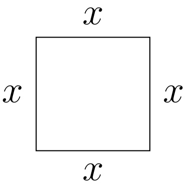
$$f(x) = 1000 - x$$

とすると,

$$f(100) = 1000 - 100 = 900, \quad f(200) = 1000 - 200 = 800$$

となる.

例題 9-2　関数の例



1 辺の長さが x の正方形の周囲の長さを y とすると，

$$y = 4x$$

となる． y は x の関数であり，定義域は集合 $\{\, x \mid x \geq 0 \}$ である．

例題 9-2　関数の例

$$f(x) = 4x$$

とおくと，たとえば，

$$f(0) = 4 \times 0 = 0, \quad f(10) = 4 \times 10 = 40$$

となる．

例題 9-3　関数のグラフとは

関数 $y = -x + 2$ について，対応する x と y の値の組 (x, y) を xy 座標平面上に点として表示してみよう．

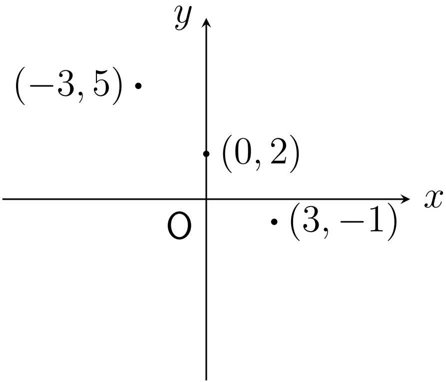
$$f(x) = -x + 2$$

とおくと，たとえば，

$$f(-3) = -(-3) + 2 = 5,\quad f(0) = -0 + 2 = 2,\quad f(3) = -3 + 2 = -1$$

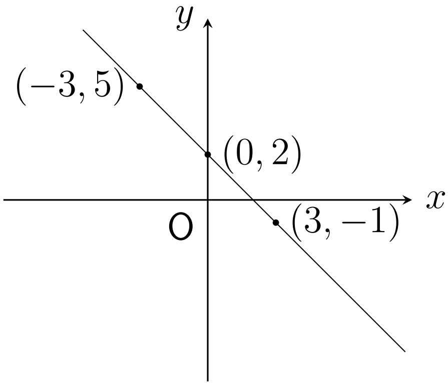
例題 9-3　関数のグラフとは

xy 座標平面上に点 $(-3, 5)$，点 $(0, 2)$，点 $(3, -1)$ を表示してみると，



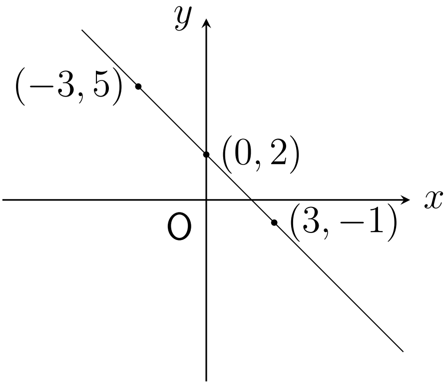
例題 9-3　関数のグラフとは

x はどんな実数でもとりうるので，これらの点を線で結ぼう．



例題 9-3　関数のグラフとは

x はどんな実数でもとりうるので，これらの点を線で結ぼう．



この線をこの関数のグラフという．

例題 9-4　関数のグラフをかく

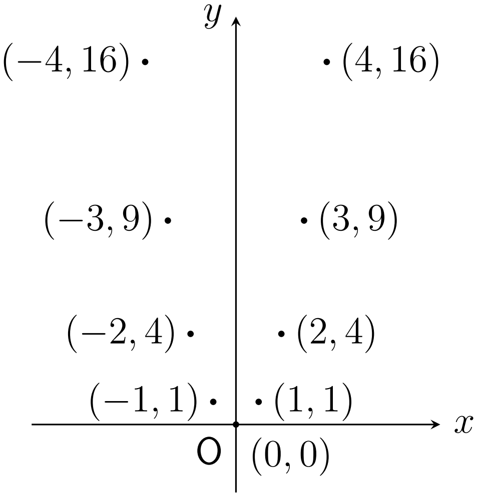
関数 $y = x^2$ について，グラフをかいてみよう．

(i) $f(x) = x^2$ とおくと，

$$f(-4) = 16,\ f(-3) = 9,\ f(-2) = 4,\ f(-1) = 1,\ f(0) = 0,$$
$$f(1) = 1,\ f(2) = 4,\ f(3) = 9,\ f(4) = 16$$

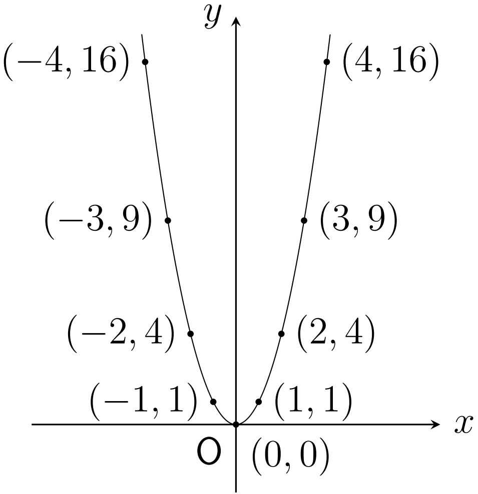
例題 9-4　関数のグラフをかく

(ii)



例題 9-4　関数のグラフをかく

(iii)



例題 9-4　関数のグラフをかく

ここで，

$$\text{関数 } y = 1000 - x, \quad y = 4x, \quad y = -x + 2$$

は 1 次関数であり，

$$\text{関数 } y = x^2, \quad y = -x^2 + 1$$

は 2 次関数である．

例題 9-4　関数のグラフをかく

一般に，

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (n \text{ は自然数},\ a_n \neq 0)$$

の形の関数は多項式関数，または，n 次関数とよばれる．

例題 9-4　関数のグラフをかく

一般に，

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (n \text{ は自然数}, \ a_n \neq 0)$$

の形の関数は多項式関数，または，n 次関数とよばれる．このとき，n は次数とよばれる．

例題 9-4　関数のグラフをかく

一般に，

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (n \text{ は自然数}, \ a_n \neq 0)$$

の形の関数は多項式関数，または，n 次関数とよばれる．このとき，n は次数とよばれる．$a_0, \ a_1, \ \cdots \ , \ a_{n-1}, \ a_n$ は係数とよばれる．

9.2　1次関数のグラフ

例題 9-5　1 次関数において x が 1 増えたとき y がどれだけ増えるのか計算する

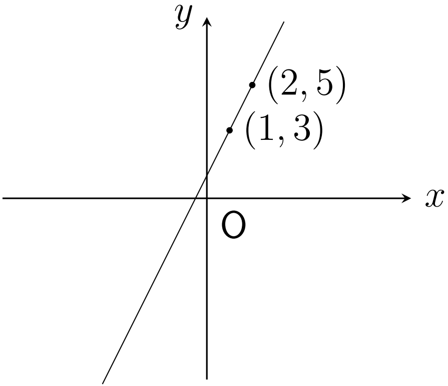
1 次関数は，$a\ (\neq 0)$，b を定数として $y = ax + b$ とあらわすことができる．1 次関数のグラフは直線といわれる．

例題 9-5　1 次関数において x が 1 増えたとき y がどれだけ増えるのか計算する

1 次関数は，$a\ (\neq 0)$，b を定数として $y = ax + b$ とあらわすことができる．1 次関数のグラフは直線といわれる．

1 次関数 $y = 2x + 1$ について，x が 1 増えたとき y がどれだけ増えるのか計算してみよう．

例題 9-5　1 次関数において x が 1 増えたとき y がどれだけ増えるのか計算する



例題9-5　1 次関数において x が 1 増えたとき y がどれだけ増えるのか計算する

対応する x と y の値の組，たとえば，$(1,3)$，$(2,5)$ に注目すると，

x は 1 から 2 に増えて，

y は 3 から 5 に増えている．

例題9-5　1次関数においてxが1増えたときyがどれだけ増えるのか計算する

対応するxとyの値の組，たとえば，$(1,3)$，$(2,5)$に注目すると，

xは1から2に増えて，

yは3から5に増えている．

つまり，xが$(2-1=)$ 1増えたとき，yは$(5-3=)$ 2だけ増える．

例題 9-5　1 次関数において x が 1 増えたとき y がどれだけ増えるのか計算する

対応する x と y の値の組，たとえば，$(1, 3)$，$(2, 5)$ に注目すると，

x は 1 から 2 に増えて，

y は 3 から 5 に増えている．

つまり，x が $(2 - 1 =)$ 1 増えたとき，y は $(5 - 3 =)$ 2 だけ増える．

グラフは直線なので，その上のどの 2 点に注目しても同じ結果が得られる．

例題 9-5　1 次関数において x が 1 増えたとき y がどれだけ増えるのか計算する

一般に，1 次関数 $y = ax + b$ について，$\boldsymbol{x}$ が 1 増えたとき $\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{a}$ だけ増える．

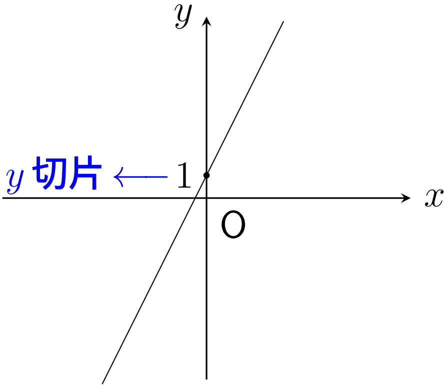
例題 9-5　1 次関数において x が 1 増えたとき y がどれだけ増えるのか計算する

一般に，1 次関数 $y = ax + b$ について，$\boldsymbol{x}$ が $\mathbf{1}$ 増えたとき $\boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{a}$ だけ増える．

a は直線の傾きとよばれる．1 次関数 $y = 2x + 1$ の傾きは 2 である．

例題9-5　1次関数において x が1増えたとき y がどれだけ増えるのか計算する

また，1次関数 $y = 2x + 1$ について，$x = 0$ のとき，
$y = 2 \times 0 + 1 = 1$ である．



例題9-5　1 次関数において x が 1 増えたとき y がどれだけ増えるのか計算する

一般に，1 次関数 $y = ax + b$ について，$x = 0$ のときの y の値は $y = a \times 0 + b = b$ である．

例題 9-5　1 次関数において x が 1 増えたとき y がどれだけ増えるのか計算する

一般に，1 次関数 $y = ax + b$ について，$x = 0$ のときの y の値は $y = a \times 0 + b = b$ である．

$\boldsymbol{b}$ **は直線の** $\boldsymbol{y}$ **切片とよばれる．** 1 次関数 $y = 2x + 1$ の y 切片は 1 である．

例題 9-6　指定された条件をみたす直線があらわす 1 次関数の式を求め，グラフをかく

(1) 傾きが -2 で，y 切片が -3 である

求める 1 次関数は $y = -2x - 3$ である．

例題9-6　指定された条件をみたす直線があらわす 1 次関数の式を求め，グラフをかく

(1) 傾きが -2 で，y 切片が -3 である

求める 1 次関数は $y = -2x - 3$ である．

y 切片が -3 なので，直線は点 $(0, -3)$ を通る．

例題9-6　指定された条件をみたす直線があらわす 1 次関数の式を求め，グラフをかく

(1) 傾きが -2 で，y 切片が -3 である

求める 1 次関数は $y = -2x - 3$ である．

y 切片が -3 なので，直線は点 $(0, -3)$ を通る．またたとえば，$x = 1$ のとき，$y = -2 \times 1 - 3 = -5$ である．

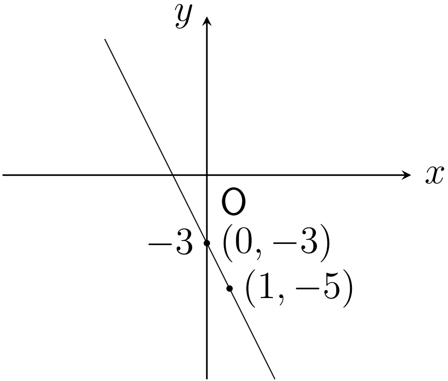
例題 9-6　指定された条件をみたす直線があらわす 1 次関数の式を求め，グラフをかく

(1) 傾きが -2 で，y 切片が -3 である

求める 1 次関数は $y = -2x - 3$ である．

y 切片が -3 なので，直線は点 $(0, -3)$ を通る．またたとえば，$x = 1$ のとき，$y = -2 \times 1 - 3 = -5$ である．これより，直線は点 $(1, -5)$ を通ることがわかる．

例題 9-6　指定された条件をみたす直線があらわす 1 次関数の式を求め，グラフをかく



例題 9-6　指定された条件をみたす直線があらわす 1 次関数の式を求め，グラフをかく

(2) 傾きが 1 で，点 $(-5, 0)$ を通る

求める 1 次関数を $y = x + b$ とおく．

例題 9-6　指定された条件をみたす直線があらわす 1 次関数の式を求め，グラフをかく

(2) 傾きが 1 で，点 $(-5, 0)$ を通る

求める 1 次関数を $y = x + b$ とおく．

直線は点 $(-5, 0)$ を通るので，$0 = -5 + b$ となり，これより，$b = 5$ である．

例題 9-6　指定された条件をみたす直線があらわす 1 次関数の式を求め，グラフをかく

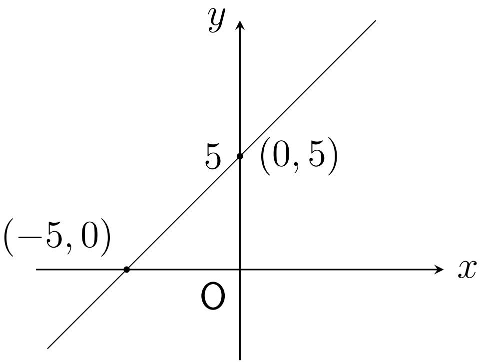
(2) 傾きが 1 で，点 $(-5, 0)$ を通る

求める 1 次関数を $y = x + b$ とおく．

直線は点 $(-5, 0)$ を通るので，$0 = -5 + b$ となり，これより，$b = 5$ である．

つまり，求める 1 次関数は $y = x + 5$ である．

例題 9-6　指定された条件をみたす直線があらわす 1 次関数の式を求め，グラフをかく



例題 9-6　指定された条件をみたす直線があらわす 1 次関数の式を求め，グラフをかく

(3) 点 $(6, 0)$，点 $(1, -10)$ を通る

求める 1 次関数を $y = ax + b$ とおく．

例題9-6　指定された条件をみたす直線があらわす 1 次関数の式を求め，グラフをかく

(3) 点 $(6,0)$，点 $(1,-10)$ を通る

求める 1 次関数を $y=ax+b$ とおく．

直線は点 $(6,0)$ を通るので，$0=6a+b$ となり，これより $b=-6a$ となる．

例題 9-6　指定された条件をみたす直線があらわす 1 次関数の式を求め，グラフをかく

また，直線は点 $(1, -10)$ を通るので，$-10 = a + b$ となる．

例題9-6　指定された条件をみたす直線があらわす1次関数の式を求め，グラフをかく

また，直線は点 $(1, -10)$ を通るので，$-10 = a + b$ となる．

これに $b = -6a$ を代入すると，$-10 = a - 6a$，つまり，$-10 = -5a$ となるので，$a = 2$ である．

例題 9-6　指定された条件をみたす直線があらわす 1 次関数の式を求め，グラフをかく

また，直線は点 $(1, -10)$ を通るので，$-10 = a + b$ となる．

これに $b = -6a$ を代入すると，$-10 = a - 6a$，つまり，$-10 = -5a$ となるので，$a = 2$ である．

これを $b = -6a$ に代入すると，$b = -6 \times 2 = -12$ である．

例題 9-6　指定された条件をみたす直線があらわす 1 次関数の式を求め，グラフをかく

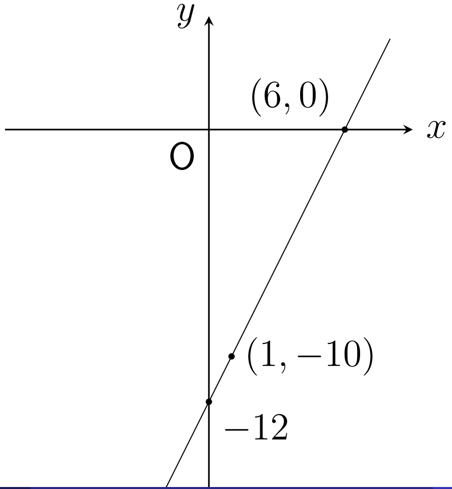
また，直線は点 $(1, -10)$ を通るので，$-10 = a + b$ となる．

これに $b = -6a$ を代入すると，$-10 = a - 6a$，つまり，$-10 = -5a$ となるので，$a = 2$ である．

これを $b = -6a$ に代入すると，$b = -6 \times 2 = -12$ である．

つまり，求める 1 次関数は $y = 2x - 12$ である．

例題 9-6　指定された条件をみたす直線があらわす 1 次関数の式を求め，グラフをかく



例題 9-7　1 次関数のグラフ上の点を求める

(1) 傾きが -12 で y 切片が 10 である直線があらわす 1 次関数における $x=-3$ のときの y の値

問題における 1 次関数は $y=-12x+10$ である．

例題 9-7　1 次関数のグラフ上の点を求める

(1) 傾きが -12 で y 切片が 10 である直線があらわす 1 次関数における $x=-3$ のときの y の値

問題における 1 次関数は $y=-12x+10$ である．

$x=-3$ を代入すると，$y=-12\times(-3)+10=46$ となる．

例題 9-7　1 次関数のグラフ上の点を求める

(2) 傾きが 10 で点 $(-2, 0)$ を通る直線と y 軸との交点の座標

問題の直線があらわす 1 次関数を $y = 10x + b$ とおく.

例題9-7　1次関数のグラフ上の点を求める

(2) 傾きが 10 で点 $(-2,0)$ を通る直線と y 軸との交点の座標

問題の直線があらわす 1 次関数を $y=10x+b$ とおく．
直線は点 $(-2,0)$ を通るので，$0=10\times(-2)+b$ となり，これより，$b=20$ となる．

例題 9-7　1 次関数のグラフ上の点を求める

(2) 傾きが 10 で点 $(-2, 0)$ を通る直線と y 軸との交点の座標

問題の直線があらわす 1 次関数を $y = 10x + b$ とおく．

直線は点 $(-2, 0)$ を通るので，$0 = 10 \times (-2) + b$ となり，これより，$b = 20$ となる．

y 切片が 20 ということになるので，求める y 軸との交点の座標は $(0, 20)$ である．

9.3　2 次関数のグラフ

例題 9-8　下に凸な 2 次関数の例

2 次関数は，$a\ (\neq 0)$，b，c を定数として $y = ax^2 + bx + c$ とあらわすことができる．2 次関数のグラフは放物線といわれる．

例題 9-8　下に凸な 2 次関数の例

2 次関数は，$a\ (\neq 0)$，b，c を定数として $y = ax^2 + bx + c$ とあらわすことができる．2 次関数のグラフは放物線といわれる．

また，この式を $y = a(x - \boldsymbol{p})^2 + \boldsymbol{q}$ の形に変形したとき，点 $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$ はグラフ（放物線）の頂点とよばれる．

例題 9-8　下に凸な 2 次関数の例

2 次関数 $y = x^2$ のグラフの頂点を求めるために，式を変形すると

$$y = (x - \mathbf{0})^2 + \mathbf{0}$$

となる．これより，このグラフは頂点 $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ の放物線である．

例題 9-8　下に凸な 2 次関数の例

2 次関数 $y = x^2$ のグラフの頂点を求めるために，式を変形すると

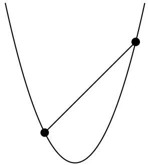
$$y = (x - \mathbf{0})^2 + \mathbf{0}$$

となる．これより，このグラフは頂点 $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ の放物線である．

また，これは下に凸な関数である．

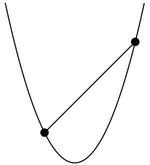
例題 9-8　下に凸な 2 次関数の例

ここで，下に凸な関数とは，そのグラフ上のどの 2 点を結んだ線分もグラフの上側にある関数のことをいう．



例題 9-8　下に凸な 2 次関数の例

ここで，下に凸な関数とは，そのグラフ上のどの 2 点を結んだ線分もグラフの上側にある関数のことをいう．



2 次関数の式の x^2 の係数（a）が正のときは，下に凸になる．

例題 9-9　上に凸な 2 次関数の例

2 次関数 $y = -x^2$ は

$$y = -(x - \mathbf{0})^2 + \mathbf{0}$$

と変形でき，そのグラフは頂点 $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ の放物線になる．

例題 9-9　上に凸な 2 次関数の例

2 次関数 $y = -x^2$ は

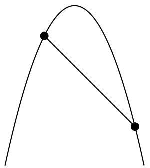
$$y = -(x - \mathbf{0})^2 + \mathbf{0}$$

と変形でき，そのグラフは頂点 $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ の放物線になる．

また，これは上に凸な関数である．

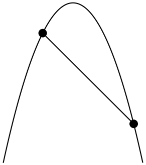
例題 9-9　上に凸な 2 次関数の例

ここで，上に凸な関数とは，そのグラフ上のどの 2 点を結んだ線分もグラフの下側にある関数のことをいう．



例題 9-9　上に凸な 2 次関数の例

ここで，上に凸な関数とは，そのグラフ上のどの 2 点を結んだ線分もグラフの下側にある関数のことをいう．



2 次関数の式の x^2 の係数（a）が負のときは，上に凸になる．

例題 9-9　上に凸な 2 次関数の例

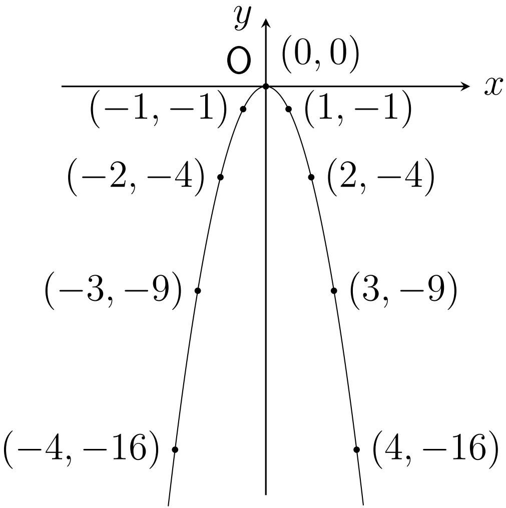
2 次関数 $y = -x^2$ のグラフをかいてたしかめてみよう．

$f(x) = -x^2$ とおくと，たとえば，

$$f(-4) = -16,\ f(-3) = -9,\ f(-2) = -4,\ f(-1) = -1,$$
$$f(0) = 0,\ f(1) = -1,\ f(2) = -4,\ f(3) = -9,\ f(4) = 16$$

グラフは次のように上に凸になる．

例題 9-9　上に凸な 2 次関数の例



例題 9-10　2 次関数 $y = x^2 + bx + c$ のグラフをかく

2 次関数 $y = x^2 + 6x + 11$ は

$$y = (x+3)^2 - 9 + 11 = (x - (\mathbf{-3}))^2 + \mathbf{2}$$

と変形できる．よって，そのグラフは頂点 $(\mathbf{-3}, \mathbf{2})$ の放物線になる．

また，これは下に凸な関数である．

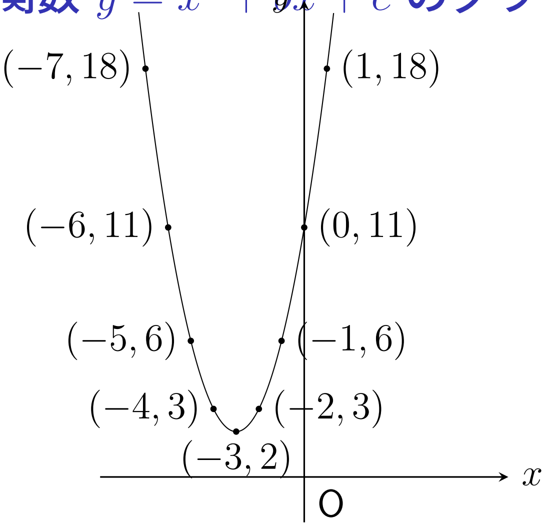
例題 9-10　2 次関数 $y = x^2 + bx + c$ のグラフをかく

$f(x) = x^2 + 6x + 11$ とおくと，たとえば，

$$f(-7) = 18,\ f(-6) = 11,\ f(-5) = 6,\ f(-4) = 3,\ f(-3) = 2,$$
$$f(-2) = 3,\ f(5) = 6,\ f(0) = 11,\ f(1) = 18$$

グラフは次のようになる．

例題 9-10　2 次関数 $y = x^2 + bx + c$ のグラフをかく



例題 9-11　2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフをかく

2 次関数 $y = 2x^2 - 12x + 16$ は

$$
\begin{aligned}
y &= 2(x^2 - 6x) + 16 = 2\left((x-3)^2 - 9\right) + 16 = 2(x-3)^2 - 18 + 16 \\
&= 2(x - \mathbf{3})^2 + (\mathbf{-2})
\end{aligned}
$$

と変形できる．よって，そのグラフは頂点 $(\mathbf{3}, \mathbf{-2})$ の放物線になる．

また，これは下に凸な関数である．

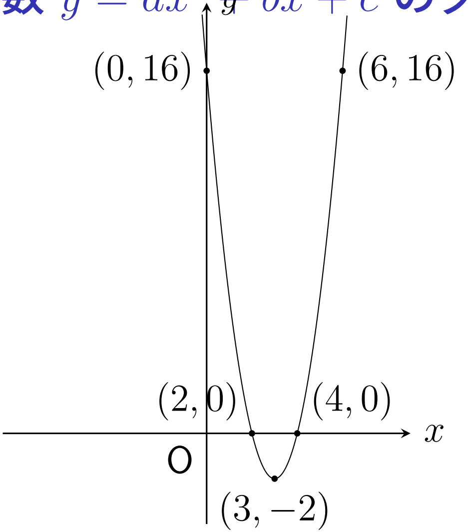
例題 9-11　2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフをかく

$f(x) = 2x^2 - 12x + 16$ とおくと，たとえば，

$$f(0) = 16,\ f(2) = 0,\ f(3) = -2,\ f(4) = 0,\ f(6) = 16$$

グラフは次のようになる．

例題 9-11　2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフをかく



例題 9-12　指定された条件をみたす放物線があらわす 2 次関数を求める

点 $(-1, 14)$，$(0, 11)$，$(4, 19)$ の 3 点を通る放物線があらわす 2 次関数の式を $y = ax^2 + bx + c$ とおくと，

$$\begin{cases} 14 = a - b + c \\ 11 = c \\ 19 = 16a + 4b + c \end{cases}$$

例題 9-12　指定された条件をみたす放物線があらわす 2 次関数を求める

点 $(-1, 14)$，$(0, 11)$，$(4, 19)$ の 3 点を通る放物線があらわす 2 次関数の式を $y = ax^2 + bx + c$ とおくと，

$$\begin{cases} 14 = a - b + c \\ 11 = c \\ 19 = 16a + 4b + c \end{cases}$$

$c = 11$ を上の式 $14 = a - b + c$ と下の式 $19 = 16a + 4b + c$ に代入すると，

例題 9-12　指定された条件をみたす放物線があらわす 2 次関数を求める

$$\begin{cases} 14 = a - b + 11 \\ 19 = 16a + 4b + 11 \end{cases}$$

例題 9-12　指定された条件をみたす放物線があらわす 2 次関数を求める

$$
\begin{cases}
14 = a - b + 11 \\
19 = 16a + 4b + 11
\end{cases}
$$

つまり

$$
\begin{cases}
a = b + 3 \\
16a + 4b = 8
\end{cases}
$$

例題 9-12　指定された条件をみたす放物線があらわす 2 次関数を求める

$$\begin{cases} 14 = a - b + 11 \\ 19 = 16a + 4b + 11 \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} a = b + 3 \\ 16a + 4b = 8 \end{cases}$$

よって，$16(b+3) + 4b = 8$，つまり，$20b = -40$ となるので，$b = -2$ となる．

例題 9-12　指定された条件をみたす放物線があらわす 2 次関数を求める

$$\begin{cases} 14 = a - b + 11 \\ 19 = 16a + 4b + 11 \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} a = b + 3 \\ 16a + 4b = 8 \end{cases}$$

よって，$16(b+3) + 4b = 8$，つまり，$20b = -40$ となるので，$b = -2$ となる．これより，$a = -2 + 3 = 1$ となる．

例題 9-12　指定された条件をみたす放物線があらわす 2 次関数を求める

$$\begin{cases} 14 = a - b + 11 \\ 19 = 16a + 4b + 11 \end{cases}$$

つまり

$$\begin{cases} a = b + 3 \\ 16a + 4b = 8 \end{cases}$$

よって，$16(b+3) + 4b = 8$，つまり，$20b = -40$ となるので，$b = -2$ となる．これより，$a = -2 + 3 = 1$ となる．

ゆえに，求める 2 次関数は $y = x^2 - 2x + 11$ である．

第 10 章　指数関数

10.1　指数の意味

例題 10-1　指数を使ってあらわす

10 を 3 個かけあわせたものは 10^3 というようにあらわすことができる．

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

例題 10-1　指数を使ってあらわす

10 を 3 個かけあわせたものは 10^3 というようにあらわすことができる．

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

「10^3」を 10 の 3 乗とよび，このなかの「10」を底，10 の右上にある「3」を指数とよぶ．

例題 10-1　指数を使ってあらわす

$\boldsymbol{a}$ の「正の整数」乗

正の定数 a と正の整数 n に対して，次のように定められている．

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n\text{ 個かけあわせる}}$$

例題 10-2　指数の例

(1) $10^2 \times 10^3 = (10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10) = 100000$

例題 10-2　指数の例

(1) $10^2 \times 10^3 = (10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10) = 100000$

(2) $\dfrac{10^5}{10^2} = \dfrac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10} = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

例題 10-2　指数の例

(1) $10^2 \times 10^3 = (10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10) = 100000$

(2) $\dfrac{10^5}{10^2} = \dfrac{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10}{10 \times 10} = 10 \times 10 \times 10 = 1000$

(3) $(10^3)^2 = (10^3) \times (10^3) = (10 \times 10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10) = 1000000$

例題 10-2　指数の例

(4) $\sqrt{10}^2 = \sqrt{10} \times \sqrt{10} = 10$

（$\sqrt{10}$ は「2 個かけあわせると 10 になる数」なので）

例題 10-2　指数の例

(4) $\sqrt{10}^2 = \sqrt{10} \times \sqrt{10} = 10$

（$\sqrt{10}$ は「2 個かけあわせると 10 になる数」なので）

(5) $\sqrt[3]{10}^3 = \sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{10} = 10$

（$\sqrt[3]{10}$ は「3 個かけあわせると 10 になる数」なので）

例題 10-3　10^{-3} のような値はどう求めればいいか考える

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

$$\downarrow$$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

$$\downarrow$$

$$10^1 = 10$$

$$\downarrow$$

例題10-3　10^{-3} のような値はどう求めればいいか考える

$$10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1000$$

$\downarrow$ $\boxed{\frac{1}{10}\text{倍}}$

$$10^2 = 10 \times 10 = 100$$

$\downarrow$ $\boxed{\frac{1}{10}\text{倍}}$

$$10^1 = 10$$

$\downarrow$ $\boxed{\frac{1}{10}\text{倍}}$

例題10-3　10^{-3} のような値はどう求めればいいか考える

$$\mathbf{10^0} =$$

$$\downarrow \quad \boxed{\frac{1}{10}\text{倍}}$$

$$\mathbf{10^{-1}} =$$

$$\downarrow \quad \boxed{\frac{1}{10}\text{倍}}$$

例題 10-3　10^{-3} のような値はどう求めればいいか考える

$$\mathbf{10^0 = 1}$$

$$\downarrow \quad \boxed{\frac{1}{10}\text{倍}}$$

$$\mathbf{10^{-1} = \frac{1}{10}}$$

$$\downarrow \quad \boxed{\frac{1}{10}\text{倍}}$$

例題10-3　10^{-3} のような値はどう求めればいいか考える

$$\mathbf{10^0 = 1}$$

$$\downarrow \quad \boxed{\tfrac{1}{10}\text{倍}}$$

$$\mathbf{10^{-1} = \frac{1}{10} \quad \left(= \frac{1}{10^1}\right)}$$

$$\downarrow \quad \boxed{\tfrac{1}{10}\text{倍}}$$

例題 10-3　10^{-3} のような値はどう求めればいいか考える

$$\mathbf{10^{-2}} =$$

$$\downarrow \quad \boxed{\frac{1}{10}\text{倍}}$$

$$\mathbf{10^{-3}} =$$

例題10-3　10^{-3}のような値はどう求めればいいか考える

$$\mathbf{10^{-2} = \frac{1}{100}}$$

$$\downarrow \quad \boxed{\frac{1}{10}\text{倍}}$$

$$\mathbf{10^{-3} = \frac{1}{1000}}$$

例題 10-3　10^{-3} のような値はどう求めればいいか考える

$$10^{-2} = \frac{1}{100} \quad \left(= \frac{1}{10^2} \right)$$

$$\downarrow \quad \boxed{\frac{1}{10}\text{倍}}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{1000} \quad \left(= \frac{1}{10^3} \right)$$

例題 10-3　10^{-3} のような値はどう求めればいいか考える

a の「整数」乗

正の定数 a と正の整数 n に対して，次のように定められている．

$$a^0 = 1, \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ここで，正の定数 a は正の整数とは限らない．

例題 10-4　「整数」乗の値を求める

(1) $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$

例題 10-4　「整数」乗の値を求める

(1) $5^{-2} = \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{25}$

(2) $1729^0 = 1$　（0 乗は 1 なので）

例題 10-4　「整数」乗の値を求める

(3) $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{10}\right)^{1}} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{10}\right)} = 10$

例題 10-4　「整数」乗の値を求める

(3) $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{10}\right)^{1}} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{10}\right)} = 10$

(4) $\left(\dfrac{1}{10}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{10}\right)^{2}} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{100}\right)} = 100$

例題 10-4　「整数」乗の値を求める

(5) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{5}\right)^{1}} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{5}\right)} = \dfrac{5}{2}$

例題 10-4　「整数」乗の値を求める

(5) $$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{1}} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)} = \frac{5}{2}$$

(6) $$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^{2}} = \frac{1}{\left(\frac{4}{25}\right)} = \frac{25}{4}$$

例題 10-4　「整数」乗の値を求める

(7) $\sqrt{3}^{\,-2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}^2} = \dfrac{1}{3}$

例題 10-5　指数法則を確認する

たとえば，「10 を 3 個かけあわせたものを 2 個かけあわせたもの」と「10 を (3×2) 個かけあわせたもの」は同じである．つまり，

$$(10^3)^2 = 10^3 \times 10^3 = (10 \times 10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10) = 10^6,$$

$$10^{3 \times 2} = 10^6$$

であり，$\mathbf{(10^3)^2 = 10^{3 \times 2}}$ が成り立つ．

例題 10-5　指数法則を確認する

たとえば,「10 を 3 個かけあわせたものを 2 個かけあわせたもの」と「10 を (3×2) 個かけあわせたもの」は同じである．つまり,

$$(10^3)^2 = 10^3 \times 10^3 = (10 \times 10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10) = 10^6,$$

$$10^{3\times 2} = 10^6$$

であり，$\mathbf{(10^3)^2 = 10^{3\times 2}}$ が成り立つ．

このような法則は一般に成り立つものである．

例題 10-5　指数法則を確認する

$\boldsymbol{a}$ の「整数」乗についての指数法則

正の定数 a と整数 p，q に対して，次が成り立つ．

$$(a^p)^q = a^{p\times q}$$

例題 10-6　$100^{\frac{1}{2}}$ のような値はどう求めればいいか考える

a の「有理数」乗についても，上記の法則「$(a^p)^q = a^{p\times q}$」が成立するように計算したいとする．

例題 10-6　$100^{\frac{1}{2}}$ のような値はどう求めればいいか考える

a の「有理数」乗についても，上記の法則「$(a^p)^q = a^{p\times q}$」が成立するように計算したいとする．

$\mathbf{100^{\frac{1}{2}}}$ の値はどう求めればいいか考察するために，これを 2 乗した値

$$(\mathbf{100^{\frac{1}{2}}})^{\mathbf{2}}$$

を考えてみよう．

例題 10-6　$100^{\frac{1}{2}}$ のような値はどう求めればいいか考える

これにも上記の法則「$(a^p)^q = a^{p\times q}$」が成り立つとすると，

$$\left(\mathbf{100^{\frac{1}{2}}}\right)^{\mathbf{2}} = 100^{\frac{1}{2}\times 2} = 100^1 = \mathbf{100}$$

となる．つまり，$\mathbf{100^{\frac{1}{2}}}$ の 2 乗は 100 になる．

例題 10-6　$100^{\frac{1}{2}}$ のような値はどう求めればいいか考える

このことから，$\mathbf{100^{\frac{1}{2}}}$ は「2 個かけあわせると 100 になるもの」にしたいということになり，$\sqrt{100}$ とすれば都合がいいということになる．

例題 10-6　$100^{\frac{1}{2}}$ のような値はどう求めればいいか考える

このことから，$\mathbf{100^{\frac{1}{2}}}$ は「2 個かけあわせると 100 になるもの」にしたいということになり，$\sqrt{100}$ とすれば都合がいいということになる．よって，

$$\mathbf{100^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\mathbf{100}} = \sqrt{10 \times 10} = 10$$

と決められる．

例題 10-6　$100^{\frac{1}{2}}$ のような値はどう求めればいいか考える

また同様に，$\mathbf{1000^{\frac{1}{3}}}$ は「**3** 個かけあわせると **1000** になるもの」にしたいということになり，$\sqrt[3]{1000}$ とすれば都合がいいということになる．

例題 10-6　$100^{\frac{1}{2}}$ のような値はどう求めればいいか考える

また同様に，$\mathbf{1000^{\frac{1}{3}}}$ は「**3** 個かけあわせると **1000** になるもの」にしたいということになり，$\sqrt[3]{1000}$ とすれば都合がいいということになる．よって，

$$\mathbf{1000^{\frac{1}{3}}} = \mathbf{\sqrt[3]{1000}} = \sqrt[3]{10 \times 10 \times 10} = 10$$

と決められる．

例題 10-6　$100^{\frac{1}{2}}$ のような値はどう求めればいいか考える

さらに同じように考えると，

$$1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1, \quad 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \quad 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2,$$

例題 10-6　$100^{\frac{1}{2}}$ のような値はどう求めればいいか考える

さらに同じように考えると，

$$1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1, \quad 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \quad 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2,$$

$$1^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1} = 1, \quad 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, \quad 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2,$$

例題 10-6　$100^{\frac{1}{2}}$ のような値はどう求めればいいか考える

さらに同じように考えると，

$$
\begin{aligned}
&1^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1, \quad && 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}, \quad && 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2, \\
&1^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1} = 1, \quad && 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}, \quad && 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2, \\
&1^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{1} = 1, \quad && 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}, \quad && 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2
\end{aligned}
$$

というように拡張できる．

例題 10-6　$100^{\frac{1}{2}}$ のような値はどう求めればいいか考える

そして一般にも，このように計算される．

a の「n 分の 1」乗

正の定数 a，正の整数 n に対し，次のように定められている．

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

ここで，正の定数 a は正の整数とは限らない．

例題 10-7　「n 分の 1」乗の値を求める

(1) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = \sqrt{3 \times 3} = 3$

例題 10-7　「n 分の 1」乗の値を求める

(1) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = \sqrt{3 \times 3} = 3$

(2) $81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3 \times 3 \times 3 \times 3} = 3$

例題 10-7　「n 分の 1」乗の値を求める

(3) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \sqrt{\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}$

例題 10-7　「n 分の 1」乗の値を求める

(3) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \sqrt{\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}$

(4) $\left(\dfrac{8}{125}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{8}{125}} = \sqrt[3]{\dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{2}{5}} = \dfrac{2}{5}$

例題 10-8　「有理数」乗の値を求める

一般の a の「有理数」乗については，法則「$a^{p\times q} = (a^p)^q$」が成立することとし，次のように変形して計算しよう．

a の「有理数」乗

正の定数 a，正の整数 n，整数 p に対し，次のように変形して計算する．

$$a^{\frac{p}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^p$$

例題 10-8　「有理数」乗の値を求める

(1) $100^{-\frac{1}{2}} = (100^{\frac{1}{2}})^{-1} = (\sqrt{100})^{-1} = (\sqrt{10 \times 10})^{-1} = 10^{-1} = \dfrac{1}{10}$

例題 10-8　「有理数」乗の値を求める

(1) $100^{-\frac{1}{2}} = (100^{\frac{1}{2}})^{-1} = (\sqrt{100})^{-1} = (\sqrt{10 \times 10})^{-1} = 10^{-1} = \dfrac{1}{10}$

(2) $8^{\frac{2}{3}} = (8^{\frac{1}{3}})^{2} = (\sqrt[3]{8})^{2} = (\sqrt[3]{2 \times 2 \times 2})^{2} = 2^{2} = 4$

例題 10-8　「有理数」乗の値を求める

(3) $16^{-\frac{5}{4}} = (16^{\frac{1}{4}})^{-5} = (\sqrt[4]{16})^{-5} = (\sqrt[4]{2 \times 2 \times 2 \times 2})^{-5} = 2^{-5}$

$$= \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

例題 10-8　「有理数」乗の値を求める

(4) $\left(\dfrac{9}{100}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\left(\dfrac{9}{100}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-3} = \left(\sqrt{\dfrac{9}{100}}\right)^{-3} = \left(\sqrt{\dfrac{3}{10} \times \dfrac{3}{10}}\right)^{-3}$

$$= \left(\frac{3}{10}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{10}\right)^3} = \frac{1}{\frac{27}{1000}} = \frac{1000}{27}$$

例題 10-9　指数法則を使って計算をする

1 ではない正の定数 a に対し，関数 $y = a^x$ のグラフは途切れずなめらかにつながる．

この関数を a を底とする指数関数とよぶ．

例題 10-9　指数法則を使って計算をする

指数法則

正の定数 a，b と実数 p，q に対し，次が成り立つ．

$$a^p a^q = a^{p+q}, \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \qquad (a^p)^q = a^{p\times q},$$

$$(ab)^p = a^p b^p, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$$

例題 10-9　指数法則を使って計算をする

たとえば，

$$2^4 \cdot 2^3 = 2^{4+3}, \qquad \frac{2^4}{2^3} = 2^{4-3}, \qquad (2^4)^3 = 2^{4\times 3},$$

$$(2\cdot 5)^4 = 2^4 \cdot 5^4, \qquad \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{2^4}{5^4}$$

が成り立つことが確認できる．

例題 10-9　指数法則を使って計算をする

指数法則を使って，次のように計算することができる．

(1) $10^{\frac{1}{3}} \times 10^{\frac{2}{3}} = 10^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 10^{1} = 10$

例題 10-9　指数法則を使って計算をする

指数法則を使って，次のように計算することができる．

(1) $10^{\frac{1}{3}} \times 10^{\frac{2}{3}} = 10^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 10^1 = 10$

(2) $\dfrac{10^{\frac{5}{2}}}{10^{\frac{1}{2}}} = 10^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} = 10^2 = 100$

例題 10-9　指数法則を使って計算をする

指数法則を使って，次のように計算することができる．

(1) $10^{\frac{1}{3}} \times 10^{\frac{2}{3}} = 10^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 10^1 = 10$

(2) $\dfrac{10^{\frac{5}{2}}}{10^{\frac{1}{2}}} = 10^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}} = 10^2 = 100$

(3) $\left(10^{\frac{1}{3}}\right)^6 = 10^{\frac{1}{3}\times 6} = 10^2 = 100$

例題 10-9　指数法則を使って計算をする

(4) $(64 \times 49)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{2}} \times 49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} \times \sqrt{49} = \sqrt{8 \times 8} \times \sqrt{7 \times 7}$

$= 8 \times 7 = 56$

例題 10-9　指数法則を使って計算をする

(4) $(64 \times 49)^{\frac{1}{2}} = 64^{\frac{1}{2}} \times 49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{64} \times \sqrt{49} = \sqrt{8 \times 8} \times \sqrt{7 \times 7}$

$= 8 \times 7 = 56$

(5) $\left(\dfrac{16}{81}\right)^{\frac{1}{4}} = \dfrac{16^{\frac{1}{4}}}{81^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \dfrac{\sqrt[4]{2 \times 2 \times 2 \times 2}}{\sqrt[4]{3 \times 3 \times 3 \times 3}} = \dfrac{2}{3}$

10.2　指数関数のグラフ

例題 10-10　指数関数 $y = a^x$ のグラフをかく（$a > 1$ のとき）

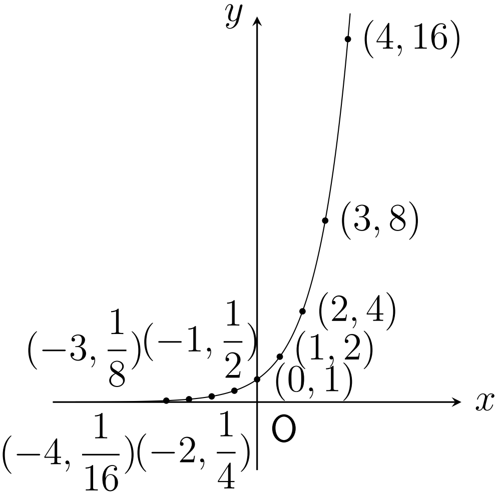
関数 $y = 2^x$ のグラフをかいてみよう．

$f(x) = 2^x$ とおくと，

$$f(-4) = \frac{1}{16},\ f(-3) = \frac{1}{8},\ f(-2) = \frac{1}{4},\ f(-1) = \frac{1}{2},\ f(0) = 1,$$

$$f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 8,\ f(4) = 16$$

例題 10-10　指数関数 $y = a^x$ のグラフをかく（$a > 1$ のとき）



例題 10-10　指数関数 $y = a^x$ のグラフをかく（$a > 1$ のとき）

一般に，a が 1 より大きいときは，指数関数 $y = a^x$ のグラフは右上がりになる．

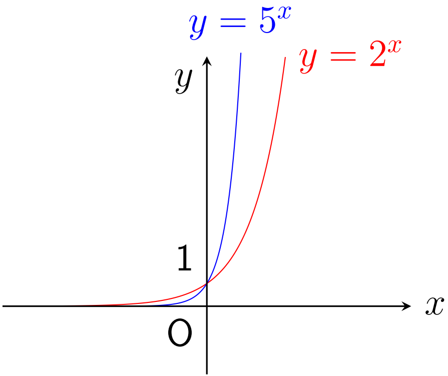
例題 10-10　指数関数 $y = a^x$ のグラフをかく（$a > 1$ のとき）

一般に，a が 1 より大きいときは，指数関数 $y = a^x$ のグラフは右上がりになる．

そして，y の値はつねに正であり，x が大きくなるにつれて急激に増加し，x が小さくなるにつれて 0 に近づくという特徴がある．

例題 10-10　指数関数 $y = a^x$ のグラフをかく（$a > 1$ のとき）

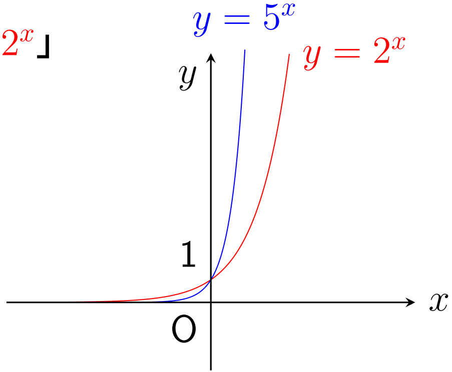
x が正のとき「$2^x < 5^x$」



例題 10-10　指数関数 $y = a^x$ のグラフをかく（$a > 1$ のとき）

x が正のとき「$2^x < 5^x$」

x が負のとき「$5^x < 2^x$」



例題 10-11　指数関数 $y = a^x$ のグラフをかく（$a < 1$ のとき）

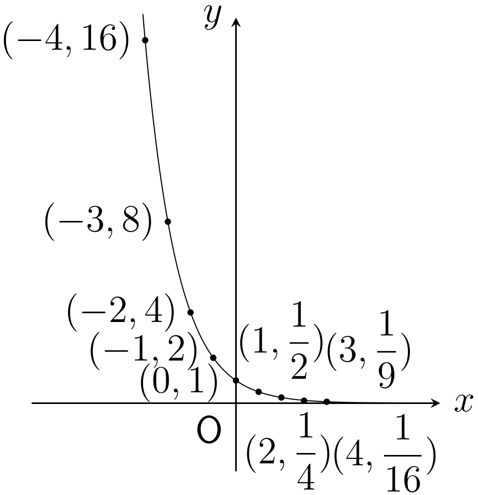
関数 $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ のグラフをかいてみよう．

$f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ とおくと，

$$f(-4) = 16,\ f(-3) = 8,\ f(-2) = 4,\ f(-1) = 2,\ f(0) = 1,$$

$$f(1) = \frac{1}{2},\ f(2) = \frac{1}{4},\ f(3) = \frac{1}{8},\ f(4) = \frac{1}{16}$$

例題 10-11　指数関数 $y = a^x$ のグラフをかく（$a < 1$ のとき）



例題 10-11　指数関数 $y = a^x$ のグラフをかく（$a < 1$ のとき）

一般に，a が 1 より小さいときは，指数関数 $y = a^x$ のグラフは右下がりになる．

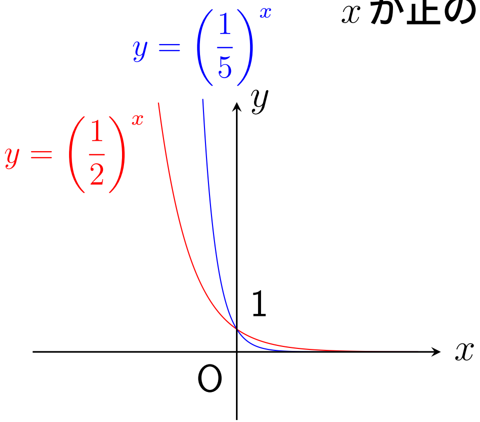
例題 10-11　指数関数 $y = a^x$ のグラフをかく（$a < 1$ のとき）

一般に，a が 1 より小さいときは，指数関数 $y = a^x$ のグラフは右下がりになる．

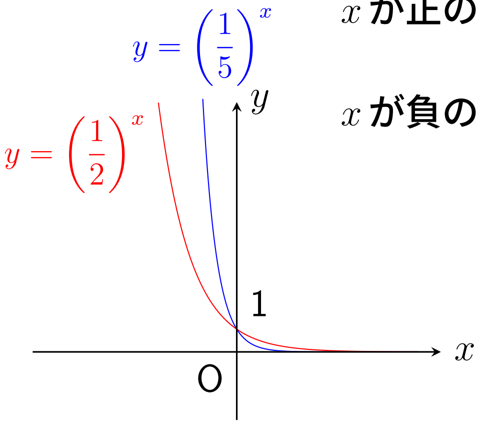
そして，y の値はつねに正であり，x が大きくなるにつれて 0 に近づき，x が小さくなるにつれて急激に増加するという特徴がある．

例題 10-11　指数関数 $y = a^x$ のグラフをかく（$a < 1$ のとき）

x が正のとき「$\left(\frac{1}{5}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^x$」



例題 10-11　指数関数 $y = a^x$ のグラフをかく（$a < 1$ のとき）



x が正のとき「$\left(\frac{1}{5}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^x$」

x が負のとき「$\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{5}\right)^x$」

第 11 章　対数関数

11.1　対数の意味

例題 11-1　対数を使ってあらわす

指数を使った式，たとえば

$$10^3 = 1000$$

のなかの指数「3」について，

$$3 = \log_{10} 1000$$

とあらわすこととする．

例題 11-1　対数を使ってあらわす

この「$\log_{10} 1000$」は 底を 10 とする 1000 の対数 とよばれる．

例題 11-1　対数を使ってあらわす

この「$\log_{10} 1000$」は 底を 10 とする 1000 の対数 とよばれる．

また，このなかの「1000」は真数とよばれる．

例題 11-1　対数を使ってあらわす

底を a とする p の対数

1 ではない正の定数 a と正の実数 p に対して，

$$a^q = p$$

をみたす実数 q がひとつ決まる．これを底を a とする p の対数とよび，次のように書く．

$$q = \log_a p$$

例題 11-2　対数の例（対数の値が正の整数の場合）

$$\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^{\boxed{3}} = \boxed{3},$$

例題 11-2　対数の例（対数の値が正の整数の場合）

$$\log_{10} 1000 = \log_{10} 10^{\boxed{3}} = \boxed{3},$$

$$\log_2 16 = \log_2 2^{\boxed{4}} = \boxed{4}$$

というように変形して求めよう．

例題 11-2　対数の例（対数の値が正の整数の場合）

$\log_a a^p$ の値

1 ではない正の定数 a と実数 p に対し，次が成り立つ．

$$\log_a a^p = p$$

例題 11-2　対数の例（対数の値が正の整数の場合）

(1) $\log_3 3^{10} = 10$

例題 11-2　対数の例（対数の値が正の整数の場合）

(1) $\log_3 3^{10} = 10$

(2) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

例題 11-2　対数の例（対数の値が正の整数の場合）

(1) $\log_3 3^{10} = 10$

(2) $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$

(3) $\log_{10} 10000 = \log_{10} 10^4 = 4$

例題 11-3　対数の例（対数の値が整数の場合）

$$10^0 = 1, \qquad 10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10}, \qquad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

と計算することができるので，次のように変形して，対数の値を求めることができる．

例題 11-3　対数の例（対数の値が整数の場合）

$$\log_{10} 1 = \log_{10} 10^{\boxed{0}} = \boxed{0},$$

例題 11-3　対数の例（対数の値が整数の場合）

$$\log_{10} 1 = \log_{10} 10^{\boxed{0}} = \boxed{0},$$

$$\log_{10} \frac{1}{10} = \log_{10} 10^{\boxed{-1}} = \boxed{-1},$$

例題 11-3　対数の例（対数の値が整数の場合）

$$\log_{10} 1 = \log_{10} 10^{\boxed{0}} = \boxed{0},$$

$$\log_{10} \frac{1}{10} = \log_{10} 10^{\boxed{-1}} = \boxed{-1},$$

$$\log_{10} \frac{1}{100} = \log_{10} 10^{\boxed{-2}} = \boxed{-2}$$

例題 11-3　対数の例（対数の値が整数の場合）

$\log_a 1$ の値，$\log_a \dfrac{1}{a^n}$ の値

1 ではない正の定数 a と正の整数 n に対して，次が成り立つ．

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a \frac{1}{a^n} = -n$$

例題 11-3　対数の例（対数の値が整数の場合）

(1) $\log_2 \dfrac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$

例題 11-3　対数の例（対数の値が整数の場合）

(1) $\log_2 \dfrac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$

(2) $\log_5 1 = \log_5 5^0 = 0$

例題 11-3　対数の例（対数の値が整数の場合）

(1) $\log_2 \dfrac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$

(2) $\log_5 1 = \log_5 5^0 = 0$

(3) $\log_3 \dfrac{1}{9} = \log_3 \dfrac{1}{3^2} = \log_3 3^{-2} = -2$

例題 11-4　対数の例（底が整数ではない場合）

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^{1}} = 10, \qquad \left(\frac{1}{10}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^{2}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{100}\right)} = 100$$

と計算することができるので，次のように変形して求めよう．

例題 11-4　対数の例（底が整数ではない場合）

$$\log_{\frac{1}{10}} 10 = \log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{10}\right)^{\boxed{-1}} = \boxed{-1},$$

例題 11-4　対数の例（底が整数ではない場合）

$$\log_{\frac{1}{10}} 10 = \log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{10}\right)^{\boxed{-1}} = \boxed{-1},$$

$$\log_{\frac{1}{10}} 100 = \log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{10}\right)^{\boxed{-2}} = \boxed{-2}$$

例題 11-4　対数の例（底が整数ではない場合）

また，

$$\sqrt{10}^{2} = 10, \qquad \sqrt{10}^{-2} = \frac{1}{\sqrt{10}^{2}} = \frac{1}{10}$$

となるので，次のように変形して求めよう．

例題 11-4　対数の例（底が整数ではない場合）

$$\log_{\sqrt{10}} 10 = \log_{\sqrt{10}} \sqrt{10}^{\boxed{2}} = \boxed{2},$$

例題 11-4　対数の例（底が整数ではない場合）

$$\log_{\sqrt{10}} 10 = \log_{\sqrt{10}} \sqrt{10}^{\boxed{2}} = \boxed{2},$$

$$\log_{\sqrt{10}} \frac{1}{10} = \log_{\sqrt{10}} \sqrt{10}^{\boxed{-2}} = \boxed{-2}$$

例題 11-4　対数の例（底が整数ではない場合）

(1) $\log_{\frac{1}{3}} 3 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = -1$

例題 11-4　対数の例（底が整数ではない場合）

(1) $\log_{\frac{1}{3}} 3 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = -1$

(2) $\log_{\sqrt{5}} 5 = \log_{\sqrt{5}} \sqrt{5}^{2} = 2$

例題 11-4　対数の例（底が整数ではない場合）

(1) $\log_{\frac{1}{3}} 3 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = -1$

(2) $\log_{\sqrt{5}} 5 = \log_{\sqrt{5}} \sqrt{5}^2 = 2$

(3) $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{3} = \log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{\sqrt{3}^2} = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}^{-2} = -2$

例題 11-5　対数法則を確認する

正の定数 a と実数 p，q に対し，

$$a^p a^q = a^{p+q}, \qquad \frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}, \qquad (a^p)^q = a^{p\times q}$$

が成り立つ（第 10 章参照）．この指数法則に対応する対数法則を確認しよう．

そのため，たとえば次のように変形してみる．

例題 11-5　対数法則を確認する

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\log_{10}(100 \times 1000)} &= \log_{10}\left(10^2 \times 10^3\right) \\
&= \log_{10} 10^{2+3} \\
&= 2 + 3 \\
&= \boldsymbol{\log_{10} 100 + \log_{10} 1000}
\end{aligned}
$$

例題 11-5　対数法則を確認する

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\log_{10}(100 \times 1000)} &= \log_{10}\left(10^2 \times 10^3\right) \\
&= \log_{10} 10^{2+3} \\
&= 2 + 3 \\
&= \boldsymbol{\log_{10} 100 + \log_{10} 1000}
\end{aligned}$$

「100000 の 0 の個数 5」$=$「100 の 0 の個数 2」$+$「1000 の 0 の個数 3」

例題 11-5　対数法則を確認する

$$\boldsymbol{\log_{10} \frac{100000}{1000}} = \log_{10} \frac{10^5}{10^3}$$

$$= \log_{10} 10^{5-3}$$

$$= 5 - 3$$

$$\boldsymbol{= \log_{10} 100000 - \log_{10} 1000}$$

例題 11-5　対数法則を確認する

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\log_{10} \frac{100000}{1000}} &= \log_{10} \frac{10^5}{10^3} \\
&= \log_{10} 10^{5-3} \\
&= 5 - 3 \\
&\boldsymbol{= \log_{10} 100000 - \log_{10} 1000}
\end{aligned}
$$

「100 の 0 の個数 2」$=$「100000 の 0 の個数 5」$-$「1000 の 0 の個数 3」

例題 11-5　対数法則を確認する

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\log_{10} 1000^2} &= \log_{10} \left(10^3\right)^2 \\
&= \log_{10} 10^{3\times 2} \\
&= 3 \times 2 \\
&= 2 \times 3 \\
&= \boldsymbol{2 \times \log_{10} 1000}
\end{aligned}
$$

例題 11-5　対数法則を確認する

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\log_{10} 1000^2} &= \log_{10}\left(10^3\right)^2 \\
&= \log_{10} 10^{3\times 2} \\
&= 3 \times 2 \\
&= 2 \times 3 \\
&= \boldsymbol{2 \times \log_{10} 1000}
\end{aligned}
$$

「1000000 の 0 の個数 6」$=2\times$「1000 の 0 の個数 3」

例題 11-5　対数法則を確認する

一般にも，このような対数法則が成り立つ．

対数法則

1 ではない正の定数 a と正の実数 p，q に対し，次が成り立つ．

$$\log_a pq = \log_a p + \log_a q, \qquad \log_a \frac{p}{q} = \log_a p - \log_a q,$$

$$\log_a p^q = q \log_a p$$

例題 11-6　$\log_{10} 1$ から $\log_{10} 10$ の値を計算する

$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする.

(1) $\log_{10} 1 = 0$

例題 11-6　$\log_{10} 1$ から $\log_{10} 10$ の値を計算する

$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

(1) $\log_{10} 1 = 0$

(2) $\log_{10} 4 = \log_{10} 2^2 = 2 \times \log_{10} 2 = 2 \times 0.3010 = 0.6020$

例題 11-6　$\log_{10} 1$ から $\log_{10} 10$ の値を計算する

(3) $\log_{10} 5 = \log_{10} \dfrac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$

例題 11-6　$\log_{10} 1$ から $\log_{10} 10$ の値を計算する

(3) $\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$

(4) $\log_{10} 10 = 1$

例題 11-6　$\log_{10} 1$ から $\log_{10} 10$ の値を計算する

(3) $\log_{10} 5 = \log_{10} \dfrac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$

(4) $\log_{10} 10 = 1$

なお，10 を底とする対数 $\log_{10} x$ を常用対数とよぶ．

例題 11-7　対数法則を使って計算をする

$$(1)\ \log_3 5 + \log_3 \frac{81}{5} = \log_3 \left(5 \times \frac{81}{5}\right) = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$$

例題 11-7　対数法則を使って計算をする

(1) $\log_3 5 + \log_3 \dfrac{81}{5} = \log_3 \left(5 \times \dfrac{81}{5}\right) = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$

(2) $\log_{10} 3000 - \log_{10} 3 = \log_{10} \dfrac{3000}{3} = \log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$

例題 11-7　対数法則を使って計算をする

$$(3)\ 2\log_2 3 - \log_2 \frac{9}{8} = \log_2 3^2 - \log_2 \frac{9}{8} = \log_2 \frac{3^2}{\frac{9}{8}} = \log_2 \frac{9}{\frac{9}{8}} = \log_2 8$$

$$= \log_2 2^3 = 3$$

例題 11-7　対数法則を使って計算をする

$$(4)\ \frac{1}{2}\log_{10} 9 + \log_{10}\frac{10}{3} = \log_{10} 9^{\frac{1}{2}} + \log_{10}\frac{10}{3} = \log_{10}\left(9^{\frac{1}{2}} \times \frac{10}{3}\right)$$

$$= \log_{10}\left(\sqrt{9} \times \frac{10}{3}\right) = \log_{10}\left(3 \times \frac{10}{3}\right) = \log_{10} 10 = 1$$

11.2　対数関数のグラフ

例題 11-8　対数関数 $y = \log_a x$ のグラフをかく（$a > 1$ のとき）

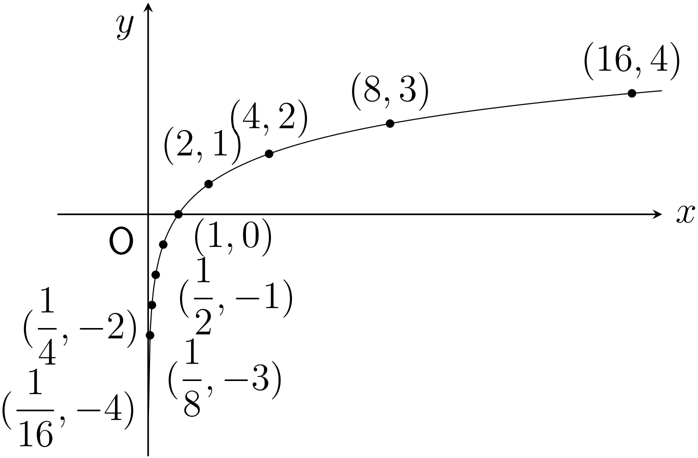
関数 $y = \log_2 x$ のグラフをかいてみよう．定義域は $x > 0$ である．

$f(x) = \log_2 x$ とおくと，

$$f\left(\frac{1}{16}\right) = -4,\ f\left(\frac{1}{8}\right) = -3,\ f\left(\frac{1}{4}\right) = -2,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = -1,$$

$$f(1) = 0,\ f(2) = 1,\ f(4) = 2,\ f(8) = 3,\ f(16) = 4$$

例題 11-8　対数関数 $y = \log_a x$ のグラフをかく（$a > 1$ のとき）



例題 11-8　対数関数 $y = \log_a x$ のグラフをかく（$a > 1$ のとき）

一般に，a が 1 より大きいときは，対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは定義域 $x > 0$ において右上がりになる．

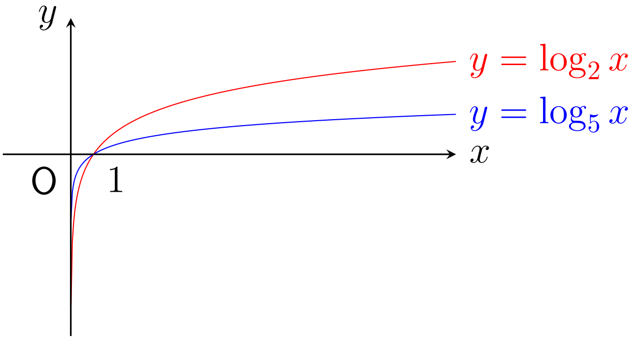
例題 11-8　対数関数 $y = \log_a x$ のグラフをかく（$a > 1$ のとき）

一般に，a が 1 より大きいときは，対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは定義域 $x > 0$ において右上がりになる．

そして，x が大きくなるにつれてゆるやかに増加し，x が 0 に近づくにつれて無限に小さくなる（軸 $x = 0$ が漸近線）という特徴がある．

例題 11-8　対数関数 $y = \log_a x$ のグラフをかく（$a > 1$ のとき）

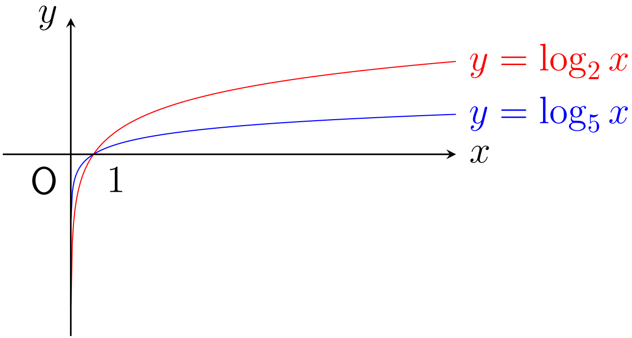
$x > 1$ のとき「$\log_5 x < \log_2 x$」



例題 11-8　対数関数 $y = \log_a x$ のグラフをかく（$a > 1$ のとき）

$x > 1$ のとき「$\log_5 x < \log_2 x$」

$0 < x < 1$ のとき「$\log_2 x < \log_5 x$」



例題 11-9　対数関数 $y = \log_a x$ のグラフをかく（$a < 1$ のとき）

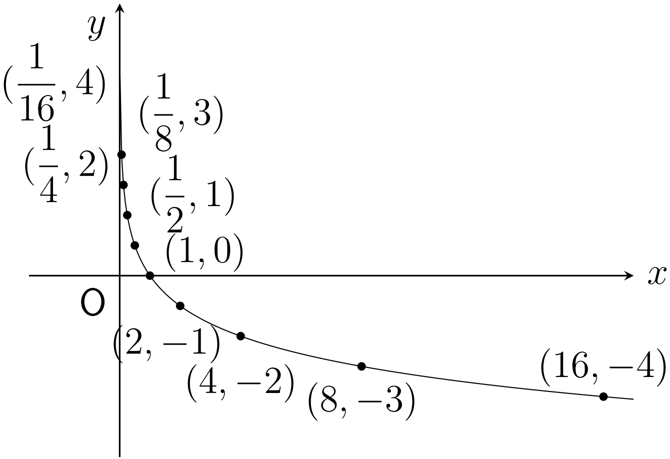
関数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ のグラフをかいてみよう．定義域は $x > 0$ である．

$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ とおくと，

$$f\left(\frac{1}{16}\right) = 4,\ f\left(\frac{1}{8}\right) = 3,\ f\left(\frac{1}{4}\right) = 2,\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$$

$$f(1) = 0,\ f(2) = -1,\ f(4) = -2,\ f(8) = -3,\ f(16) = 4$$

例題 11-9　対数関数 $y = \log_a x$ のグラフをかく（$a < 1$ のとき）



例題 11-9　対数関数 $y = \log_a x$ のグラフをかく（$a < 1$ のとき）

一般に，a が 1 より小さいときは，対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは定義域 $x > 0$ において右下がりになる．

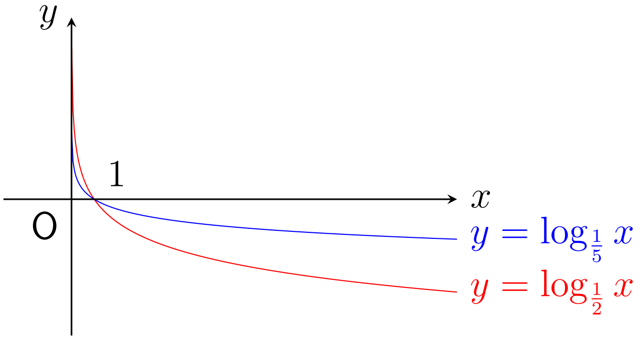
例題 11-9　対数関数 $y = \log_a x$ のグラフをかく（$a < 1$ のとき）

一般に，a が 1 より小さいときは，対数関数 $y = \log_a x$ のグラフは定義域 $x > 0$ において右下がりになる．

そして，x が大きくなるにつれてゆるやかに減少し，x が 0 に近づくにつれて無限に大きくなる（軸 $x = 0$ が漸近線）という特徴がある．

例題 11-9　対数関数 $y = \log_a x$ のグラフをかく（$a < 1$ のとき）

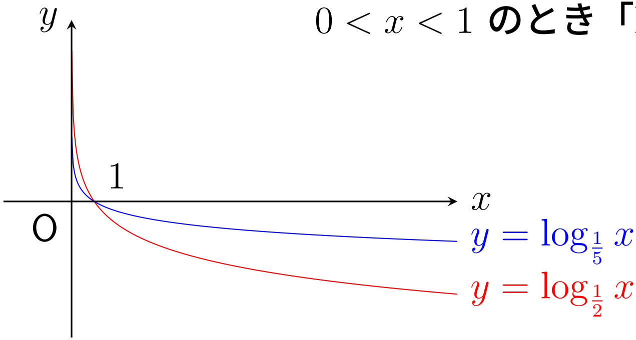
$x > 1$ のとき「$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{5}} x$」



例題 11-9　対数関数 $y = \log_a x$ のグラフをかく（$a < 1$ のとき）

$x > 1$ のとき「$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{5}} x$」

$0 < x < 1$ のとき「$\log_{\frac{1}{5}} x < \log_{\frac{1}{2}} x$」

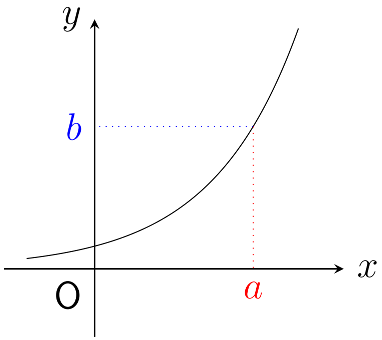


第 12 章　微分係数

12.1　関数の極限

例題 12-1　グラフがつながっている関数の極限値

関数 $y = f(x)$ について，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ があるひとつの値 b に限りなく近づくとする．



例題 12-1　グラフがつながっている関数の極限値

このことを

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

とあらわす.

例題 12-1　グラフがつながっている関数の極限値

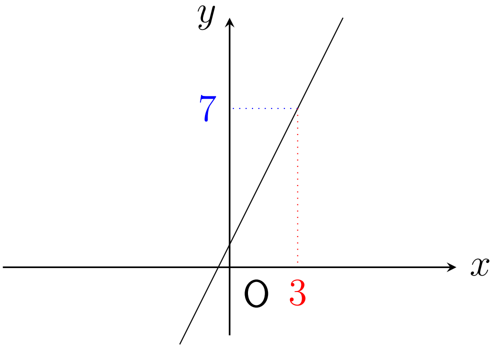
このことを

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

とあらわす．このとき b を，$x \to a$ のときの $f(x)$ の**極限値**という．

例題 12-1　グラフがつながっている関数の極限値

関数 $y = f(x)$ について，$f(x) = 2x + 1$ と定義されているとする．



例題 12-1　グラフがつながっている関数の極限値

このとき，たとえば，

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 7 \ \ (= f(3))$$

となる．

例題 12-1　グラフがつながっている関数の極限値

このとき，たとえば，

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 7 \quad (= f(3))$$

となる．

このように，関数 $y = f(x)$ は，$\lim_{x \to 3} f(x)$ が存在して，その値が $f(3)$ と一致している．

例題 12-1　グラフがつながっている関数の極限値

このとき，たとえば，

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 7 \ \ (= f(3))$$

となる．

このように，関数 $y = f(x)$ は，$\lim_{x \to 3} f(x)$ が存在して，その値が $f(3)$ と一致している．これは，$x = 3$ において，グラフがつながっているということをあらわしている．

例題 12-1　グラフがつながっている関数の極限値

このことを，関数 $y = f(x)$ は $\boldsymbol{x = 3}$ **において連続** であるという．

例題 12-1　グラフがつながっている関数の極限値

このことを，関数 $y = f(x)$ は $x = 3$ において連続 であるという．

また，この関数はどの点においても連続である．このような関数は，連続関数であるといわれる．

例題 12-1　グラフがつながっている関数の極限値

このことを，関数 $y = f(x)$ は $x = 3$ において連続 であるという．

また，この関数はどの点においても連続である．このような関数は，連続関数であるといわれる．

グラフが各点でつながっているような関数は，連続関数であるといえる．

例題 12-1　グラフがつながっている関数の極限値

(1) $\lim_{x \to 5} (x + 10) = 5 + 10 = 15$

例題 12-1　グラフがつながっている関数の極限値

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 5} (x + 10) = 5 + 10 = 15$

(2) $\displaystyle\lim_{x \to 10} \frac{x^2 - 50}{x} = \frac{10^2 - 50}{10} = 5$

例題 12-1　グラフがつながっている関数の極限値

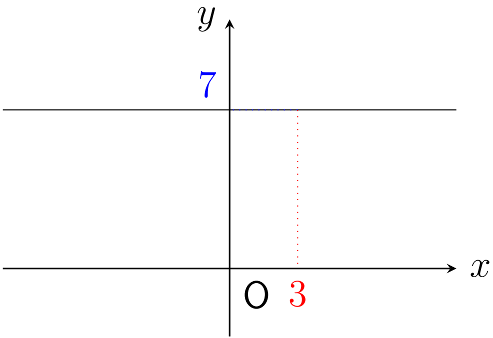
(3) そのまま x に 0 を代入すると，分母も分子も 0 になってしまう．

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^2-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2x+1)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x+2)=0+2=2$$

例題 12-1　グラフがつながっている関数の極限値

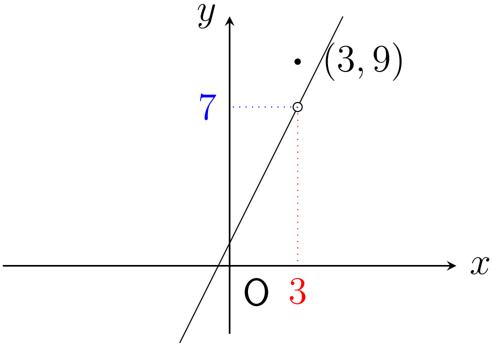
(4) 関数 $f(x) = 7$ は，どんな x においても $f(x)$ が 7 である．



よって，$\displaystyle\lim_{x \to 3} 7 = 7$

例題 12-2　グラフがつながっていない関数の極限値

関数 $y = f(x)$ について，$f(3) = 9$ であり，3 以外の x では $f(x) = 2x + 1$ と定義されているとする．



例題 12-2　グラフがつながっていない関数の極限値

この場合，x が $\mathbf{3}$ と異なる値をとりながら 3 に限りなく近づくとき，$f(x)$ は $(2 \times 3 + 1 =)\ 7$ に限りなく近づく（**$\mathbf{3}$ と異なる x では $f(x) = 2x + 1$ なので**）．つまり，

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 7 \quad (\neq f(3))$$

ということになる．

例題 12-2　グラフがつながっていない関数の極限値

このように，関数 $y = f(x)$ は，$\lim_{x \to 3} f(x)$ が存在するが，その値が $f(3)$ と一致していない．

例題 12-2　グラフがつながっていない関数の極限値

このように，関数 $y = f(x)$ は，$\lim_{x \to 3} f(x)$ が存在するが，その値が $f(3)$ と一致していない．これは，$x = 3$ において，グラフがつながっていないということをあらわしている．

例題 12-2　グラフがつながっていない関数の極限値

このように，関数 $y = f(x)$ は，$\lim_{x \to 3} f(x)$ が存在するが，その値が $f(3)$ と一致していない．これは，$x = 3$ において，グラフがつながっていないということをあらわしている．

この関数は $x = 3$ において連続ではないのである．

例題 12-2　グラフがつながっていない関数の極限値

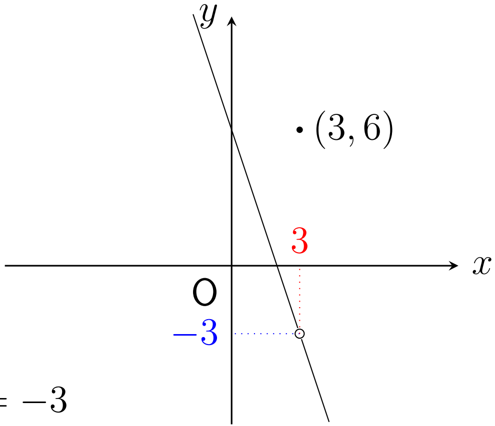
(1) $\lim_{x \to 3} (-3x + 6) = -3 \times 3 + 6 = -3$

例題 12-2　グラフがつながっていない関数の極限値

(2) $f(x) = \begin{cases} -3x+6 & (x \neq 3) \\ 6 & (x = 3) \end{cases}$ とするときの $\lim_{x \to 3} f(x)$

x が 3 と異なる値をとりながら 3 に限りなく近づくとき，$f(x)$ は -3 に限りなく近づく．

例題 12-2　グラフがつながっていない関数の極限値



よって，$\displaystyle\lim_{x \to 3} f(x) = -3$

例題 12-2　グラフがつながっていない関数の極限値

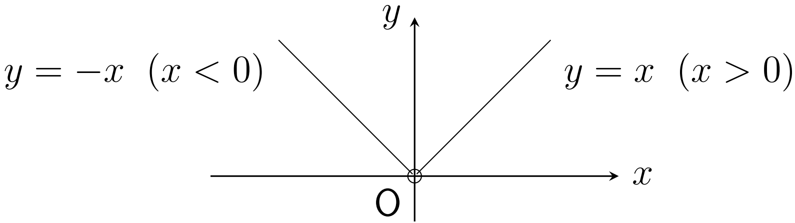
(3) $\lim_{x \to 0} x = 0$

例題 12-2　グラフがつながっていない関数の極限値

(4) $f(x) = \begin{cases} -x & (x < 0) \\ x & (x > 0) \end{cases}$ とするときの $\lim_{x \to 0} f(x)$

x が 0 と異なる値をとりながら 0 に限りなく近づくとき，$f(x)$ は 0 に限りなく近づく．

例題 12-2　グラフがつながっていない関数の極限値



よって，$\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

例題 12-2　グラフがつながっていない関数の極限値

このように，$f(x)$ は $x=0$ において定義されていなくても，極限値

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

は存在することがあることに注意しよう．

例題 12-3　関数の極限値を求める（因数分解を用いる）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

そのまま x に 2 を代入すると，分母も分子も 0 になってしまう．

例題 12-3　関数の極限値を求める（因数分解を用いる）

(1) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

そのまま x に 2 を代入すると，分母も分子も 0 になってしまう．
分母と分子をそれぞれ $(x-2)$ で割ると，

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 2+2 = 4$$

例題 12-3　関数の極限値を求める（因数分解を用いる）

(2) $\displaystyle \lim_{x \to -10} \frac{x^2 + 5x - 50}{x + 10}$

そのまま x に -10 を代入すると，分母も分子も 0 になってしまう．

例題 12-3　関数の極限値を求める（因数分解を用いる）

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-10}\frac{x^2+5x-50}{x+10}$

そのまま x に -10 を代入すると，分母も分子も 0 になってしまう．
分母と分子をそれぞれ $(x+10)$ で割ると，

$$\lim_{x\to-10}\frac{x^2+5x-50}{x+10}=\lim_{x\to-10}\frac{(x+10)(x-5)}{x+10}=\lim_{x\to-10}(x-5)$$

$$=-10-5=-15$$

例題 12-4　関数の極限値を求める（有理化を用いる）

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}{x - 2}$$ を求めよう．

そのまま x に 2 を代入すると，分母も分子も 0 になってしまう．

例題 12-4　関数の極限値を求める（有理化を用いる）

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{x-2}$ を求めよう．

そのまま x に 2 を代入すると，分母も分子も 0 になってしまう．
分母と分子にそれぞれ $(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})$ をかけると，

例題 12-4　関数の極限値を求める（有理化を用いる）

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{3})(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}{(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}$$

（↓ **乗法公式** $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ **より**）

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{3}^2}{(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)-3}{(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})}$$

例題 12-4　関数の極限値を求める（有理化を用いる）

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+1}+\sqrt{3})} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2+1}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

12.2　関数の傾きと微分の関係

例題 12-5　1 次関数の平均変化率を求める

平均変化率

関数 $y = f(x)$ について，x が a から $a + h$ まで変わるときの平均変化率は次で求められる．

$$\text{平均変化率} = \frac{y\,\text{の増加量}}{x\,\text{の増加量}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

例題 12-5　1 次関数の平均変化率を求める

関数 $y = f(x)$ について，$f(x) = 2x$ とする．x が 1 から 3 まで変わるときの平均変化率を求めてみよう．

例題 12-5　1 次関数の平均変化率を求める

関数 $y = f(x)$ について，$f(x) = 2x$ とする．x が 1 から 3 まで変わるときの平均変化率を求めてみよう．

このとき，グラフ上の点 $(1, 2)$ は点 $(3, 6)$ へ変化している．
そして，x の増加量は $(3 - 1 =)\ 2$ で，y の増加量は $(6 - 2 =)\ 4$ であることがわかる．

例題 12-5　1 次関数の平均変化率を求める

関数 $y = f(x)$ について，$f(x) = 2x$ とする．x が 1 から 3 まで変わるときの平均変化率を求めてみよう．

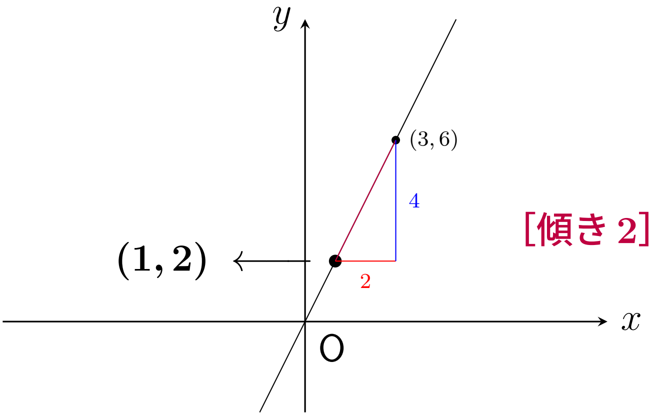
このとき，グラフ上の点 $(1, 2)$ は点 $(3, 6)$ へ変化している．
そして，x の増加量は $(3 - 1 =)\ 2$ で，y の増加量は $(6 - 2 =)\ 4$ であることがわかる．

$$\text{平均変化率} = \frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{6 - 2}{3 - 1} = 2$$

例題 12-5　1 次関数の平均変化率を求める

この平均変化率「2」はグラフの直線上のどの 2 点をとって考えても同じであり，直線の傾きと一致する．

例題 12-5　1 次関数の平均変化率を求める



例題 12-6　2 次関数の平均変化率を求める

関数 $y = f(x)$ について，$f(x) = x^2$ とする．x が 1 から 3 まで変わるときの平均変化率を求めてみよう．

例題 12-6　2 次関数の平均変化率を求める

関数 $y = f(x)$ について，$f(x) = x^2$ とする．x が 1 から 3 まで変わるときの平均変化率を求めてみよう．

このとき，グラフ上の点 $(1, 1)$ は点 $(3, 9)$ へ変化している．
そして，x の増加量は $(3 - 1 =)\ 2$ で，y の増加量は $(9 - 1 =)\ 8$ であることがわかる．

例題 12-6　2 次関数の平均変化率を求める

関数 $y = f(x)$ について，$f(x) = x^2$ とする．x が 1 から 3 まで変わるときの平均変化率を求めてみよう．

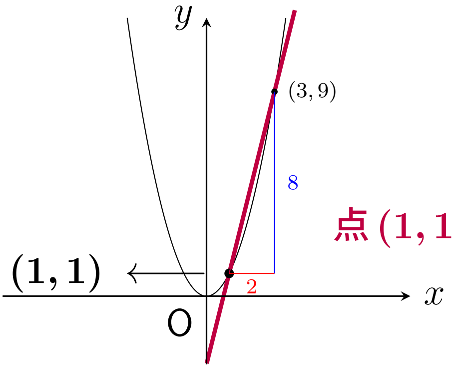
このとき，グラフ上の点 $(1, 1)$ は点 $(3, 9)$ へ変化している．
そして，x の増加量は $(3-1=)\ 2$ で，y の増加量は $(9-1=)\ 8$ であることがわかる．

$$\text{平均変化率} = \frac{y\text{ の増加量}}{x\text{ の増加量}} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{9-1}{3-1} = 4$$

例題 12-6　2 次関数の平均変化率を求める

この平均変化率「4」は，グラフ上の点 $(1,1)$ と点 $(3,9)$ を結ぶ直線の傾きと一致する．平均変化率は，グラフ上のどの 2 点をとって考えるかによって異なる．

例題 12-6　2 次関数の平均変化率を求める



点 $(1,1)$ と点 $(3,9)$ を結ぶ直線　[傾き 4]

例題 12-7　2 次関数の微分係数を求める

例題 12-6，問題 12-6 においては，2 次関数 $f(x) = x^2$ について，グラフ上の点 $(1, 1)$ からの平均変化率を計算した．

その際，x の増加量を 2 から 1 へ小さくしていったが，これをもっと小さくしていくことを考えよう．そのため，x の増加量を h とおき，この h をどんどん小さくしていくとしよう．

例題 12-7　2 次関数の微分係数を求める

2 次関数 $f(x) = x^2$ のグラフ上の点 $(1,1)$ からの変化を考える．

x の増加量を h とするとき，点 $(1,1)$ は点 $(1+h,(1+h)^2)$ へ変化している．y の増加量は $((1+h)^2-1)$ である．

例題 12-7　2 次関数の微分係数を求める

$$\text{平均変化率} = \frac{y\,\text{の増加量}}{x\,\text{の増加量}} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1}{h}$$

$$= \frac{1+2h+h^2-1}{h} = 2+h$$

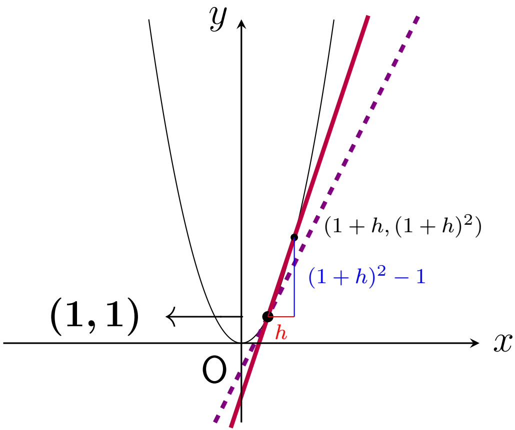
例題 12-7　2 次関数の微分係数を求める

$$\text{平均変化率} = \frac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1}{h}$$

$$= \frac{1+2h+h^2-1}{h} = 2+h$$

この平均変化率「$2+h$」は，グラフ上の点 $(1,1)$ と点 $(1+h,(1+h)^2)$ を結ぶ直線の傾きと一致する．

例題 12-7　2 次関数の微分係数を求める



$\boldsymbol{x}$ の増加量 $\boldsymbol{h}$ を $\mathbf{0}$ に近づけると，

「点 $(1,1)$ と点 $(1+h,(1+h)^2)$ を結ぶ直線（図の実線）」は

「点 $(1,1)$ における接線（図の点線）」に近づいていく

例題 12-7　2 次関数の微分係数を求める

h を 0 に近づけていったときの平均変化率の極限値が存在するならば，それは点 $(1, 1)$ における接線の傾きである．

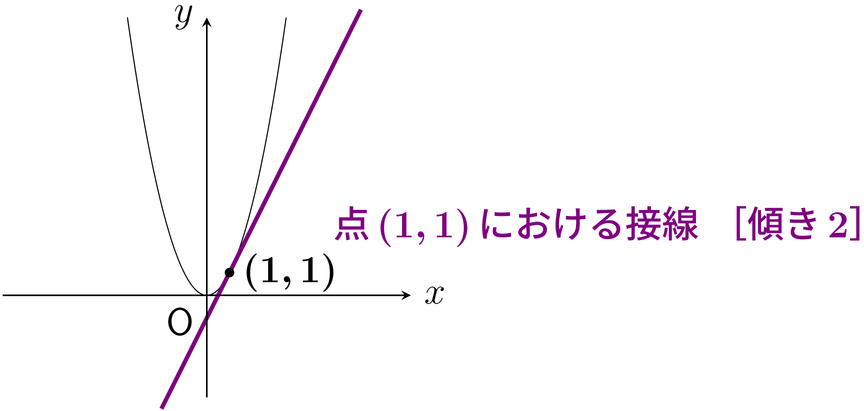
例題 12-7　2 次関数の微分係数を求める

h を 0 に近づけていったときの平均変化率の極限値が存在するならば，それは点 $(1,1)$ における接線の傾きである．ここで，

$$\lim_{h \to 0} (2+h) = 2$$

なので，平均変化率の極限値「2」が存在する．

例題 12-7　2 次関数の微分係数を求める



例題 12-7　2 次関数の微分係数を求める

なお，このような極限値が存在することを，関数 $y = f(x)$ は $x = 1$ において微分可能 であるという．

例題 12-7　2 次関数の微分係数を求める

なお，このような極限値が存在することを，関数 $y = f(x)$ は $\boldsymbol{x = 1}$ において微分可能 であるという．

また，この極限値「2」のことを，関数 $y = f(x)$ の $\boldsymbol{x = 1}$ における微分係数 といい，$f'(1)$ であらわす．

例題 12-7　2 次関数の微分係数を求める

なお，このような極限値が存在することを，関数 $y = f(x)$ は $x = 1$ において**微分可能** であるという．

また，この極限値「2」のことを，関数 $y = f(x)$ の $x = 1$ における**微分係数** といい，$f'(1)$ であらわす．

関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(1, 1)$ における接線の傾き（微分係数 $f'(1)$）は「2」であることがわかる．

例題 12-7　2 次関数の微分係数を求める

微分係数

関数 $y = f(x)$ が $x = a$ において微分可能であるとは，極限値

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在することをいう．このとき，その極限値のことを $f'(a)$ であらわし，関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数とよぶ．

例題 12-7　2 次関数の微分係数を求める

関数 $y = f(x)$ が $x = a$ において微分可能であるということは，グラフ上の点 $(a, f(a))$ において（x 軸に垂直でない）接線がひととおりに引けるということである（グラフがなめらかということである）.

例題 12-7　2 次関数の微分係数を求める

関数 $y = f(x)$ が $x = a$ において微分可能であるということは，グラフ上の点 $(a, f(a))$ において（x 軸に垂直でない）接線がひととおりに引けるということである（グラフがなめらかということである）．

このとき，微分係数 $f'(a)$ はその接線の傾きをあらわす．

例題 12-7　2 次関数の微分係数を求める

また，上記の関数 $f(x) = x^2$ はどの点においても微分可能である．このような関数は，微分可能な関数 であるといわれる．

例題 12-7　2 次関数の微分係数を求める

また，上記の関数 $f(x) = x^2$ はどの点においても微分可能である．このような関数は，微分可能な関数 であるといわれる．

グラフが各点でなめらかにつながっているような関数は，微分可能な関数であるといえる．

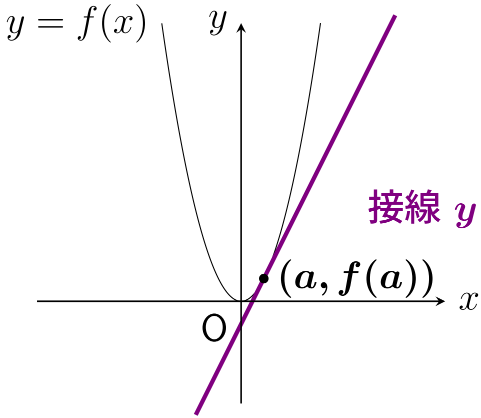
例題 12-8　2 次関数の接線の式を求める

接線

$y = f(x)$ を $x = a$ において微分可能な関数とするとき，そのグラフ上の点 $(a, f(a))$ を通り，この点における傾きが $f'(a)$ である直線を，この関数の点 $(a, f(a))$ における接線とよぶ．それがあらわす 1 次関数の式を接線の式といい，次のように書くことができる．

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

例題 12-8　2次関数の接線の式を求める



接線 $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

例題 12-8　2 次関数の接線の式を求める

関数 $y = x^2$ の点 $(1, 1)$ における接線の式を求めてみよう．

例題 12-7 より，関数 $y = x^2$ の点 $(1, 1)$ における接線の傾きは 2 であることがわかっている．

例題 12-8　2 次関数の接線の式を求める

関数 $y = x^2$ の点 $(1, 1)$ における接線の式を求めてみよう．

例題 12-7 より，関数 $y = x^2$ の点 $(1, 1)$ における接線の傾きは 2 であることがわかっている．よって，求める接線の式は

$$y = 2(x - 1) + 1$$

である．

例題 12-8　2 次関数の接線の式を求める

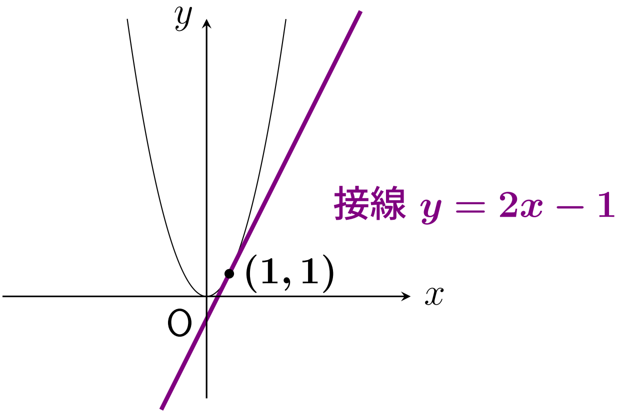
関数 $y = x^2$ の点 $(1, 1)$ における接線の式を求めてみよう．

例題 12-7 より，関数 $y = x^2$ の点 $(1, 1)$ における接線の傾きは 2 であることがわかっている．よって，求める接線の式は

$$y = 2(x - 1) + 1$$

である．これを整理すると，$y = 2x - 1$ となる．

例題 12-8　2 次関数の接線の式を求める



第 13 章　1 変数関数の微分法

13.1　導関数

例題 13-1　導関数とは

微分可能な関数 f の $x = a$ における微分係数は

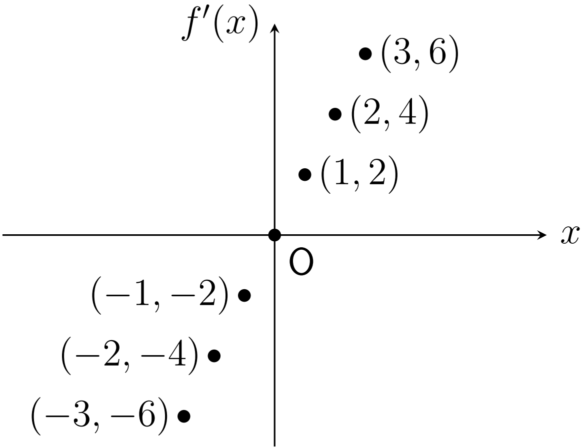
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

と計算される．たとえば，2 次関数 $f(x) = x^2$ について，

$$f'(-3) = -6,\quad f'(-2) = -4,\quad f'(-1) = -2,\quad f'(0) = 0,$$
$$f'(1) = 2,\quad f'(2) = 4,\quad f'(3) = 6$$

となった（第 12 章参照）．

例題 13-1　導関数とは



例題 13-1　導関数とは

このように，a の値に応じて微分係数 $f'(a)$ の値が対応していることがわかった．

例題 13-1　導関数とは

このように，a の値に応じて微分係数 $f'(a)$ の値が対応していることがわかった．

そこで，この対応をあらたな関数とみなすこととする．

例題 13-1　導関数とは

導関数

微分可能な関数 f について，各点 x の値に応じて微分係数 $f'(x)$ の値を対応させるあらたな関数を考える．

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

例題 13-1　導関数とは

導関数

微分可能な関数 f について，各点 x の値に応じて微分係数 $f'(x)$ の値を対応させるあらたな関数を考える．

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

この関数 f' は関数 f の導関数とよばれる．

例題 13-1　導関数とは

また，関数 f の導関数を求めることを，関数 f を微分するという．

例題 13-1　導関数とは

また，関数 f の導関数を求めることを，関数 f を微分するという．

微分係数 $f'(a)$ は値であるが，導関数 f' は関数である．

例題 13-1　導関数とは

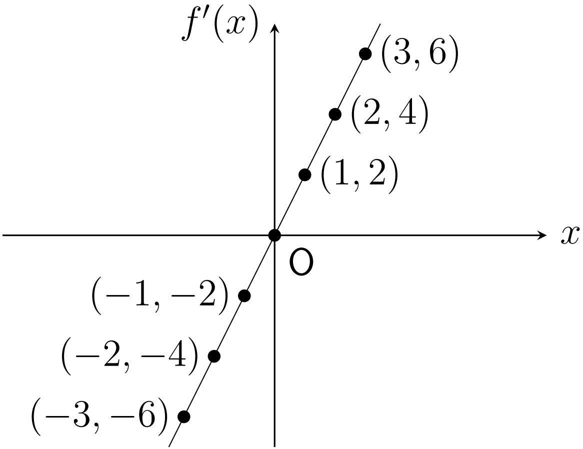
関数 $f(x) = x^2$ の導関数は，次のように計算される．

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x$$

つまり，$f'(x) = 2x$ となる．

例題 13-1　導関数とは



例題 13-2　導関数を求め，その結果を用いて微分係数を求める

関数 $f(x) = x^3$ の導関数は，

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

（↓ 3 次の乗法公式 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ より）

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - x^3}{h}$$

例題 13-2　導関数を求め，その結果を用いて微分係数を求める

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2)$$

$$= 3x^2 + 3 \times x \times 0 + 0^2$$

$$= 3x^2$$

例題 13-2　導関数を求め，その結果を用いて微分係数を求める

つまり，$f'(x) = 3x^2$ となるので，

$$f'(-3) = 3 \times (-3)^2 = 3 \times 9 = 27,$$

例題 13-2　導関数を求め，その結果を用いて微分係数を求める

つまり，$f'(x) = 3x^2$ となるので，

$$f'(-3) = 3 \times (-3)^2 = 3 \times 9 = 27,$$

$$f'(3) = 3 \times 3^2 = 3 \times 9 = 27$$

となる．

例題 13-3　定義にしたがって導関数を求める

(1) $f(x) = x$ とするとき，

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

よって，関数 $f(x) = x$ の導関数は $f'(x) = 1$ である．

例題 13-3　定義にしたがって導関数を求める

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ とするとき，

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{1}{x+h} - \dfrac{1}{x}}{h}$$

（↓分母，分子にそれぞれ $x(x+h)$ をかけると）

例題 13-3　定義にしたがって導関数を求める

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{x(x+h)}{x+h} - \dfrac{x(x+h)}{x}}{hx(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{x-(x+h)}{hx(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{hx(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x(x+0)} = -\frac{1}{x^2}$$

よって，関数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ の導関数は $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ である．

例題 13-3　定義にしたがって導関数を求める

(3) $f(x) = \sqrt{x}$ とするとき，

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

（↓分母，分子にそれぞれ $(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})$ をかけると）

例題 13-3　定義にしたがって導関数を求める

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

（↓ **乗法公式** $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ **より**）

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h}^2 - \sqrt{x}^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + x)} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + x)}$$

例題 13-3　定義にしたがって導関数を求める

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

よって，関数 $f(x) = \sqrt{x}$ の導関数は $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ である．

例題 13-3　定義にしたがって導関数を求める

- $(x)' = 1$
- $(x^2)' = 2x$
- $(x^3)' = 3x^2$
- $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$　つまり　$(x^{-1})' = (-1)x^{-2}$
- $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$　つまり　$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
- $(a)' = 0$　（a は定数）

例題 13-3　定義にしたがって導関数を求める

一般にも，次が成り立つ．

微分公式

$f(x) = x^a$ について，$f'(x) = ax^{(a-1)}$　（a は任意の実数）

例題 13-3　定義にしたがって導関数を求める

この公式より，

$$a = 4 \text{ とすると，} f(x) = x^4 \text{ について，} f'(x) = 4x^{(4-1)} = 4x^3,$$

例題 13-3　定義にしたがって導関数を求める

この公式より，

$a = 4$ とすると，$f(x) = x^4$ について，$f'(x) = 4x^{(4-1)} = 4x^3$,

$a = 5$ とすると，$f(x) = x^5$ について，$f'(x) = 5x^{(5-1)} = 5x^4$

例題 13-3　定義にしたがって導関数を求める

また，次が成り立つ．

微分の線型性

a，b を定数とし，$f(x)$，$g(x)$ を微分可能な関数とするとき，関数 $a\,f(x) + b\,g(x)$ の導関数は，$a\,f'(x) + b\,g'(x)$ となる．

例題 13-3　定義にしたがって導関数を求める

たとえば，

$$
\begin{aligned}
(x^3 + 10x^2 - 19x + 4)' &= (x^3)' + 10 \times (x^2)' - 19 \times (x)' + 4' \\
&= 3x^2 + 10 \times 2x - 19 \times 1 + 0 \\
&= 3x^2 + 20x - 19
\end{aligned}
$$

例題 13-4　関数を微分する

(1) $f(x) = x^3 - 5x^2$ とするとき，

$$f'(x) = (x^3)' - 5 \times (x^2)' = 3x^2 - 5 \times 2x = 3x^2 - 10x$$

例題 13-4　関数を微分する

(1) $f(x) = x^3 - 5x^2$ とするとき，

$$f'(x) = (x^3)' - 5 \times (x^2)' = 3x^2 - 5 \times 2x = 3x^2 - 10x$$

(2) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ とするとき，

$$f'(x) = 2 \times \left(\frac{1}{x}\right)' = 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}$$

例題 13-4　関数を微分する

(3) $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ とするとき，$f'(x) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)' = 0$

例題 13-4　関数を微分する

(3) $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ とするとき，$f'(x) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)' = 0$

(4) $f(x) = \sqrt{x} - x - 1$ とするとき，

$$f'(x) = (\sqrt{x})' - x' - 1' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 - 0 = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$$

13.2　関数の増減とグラフ

例題 13-5　微分係数の符号と関数の増減との関係をたしかめる

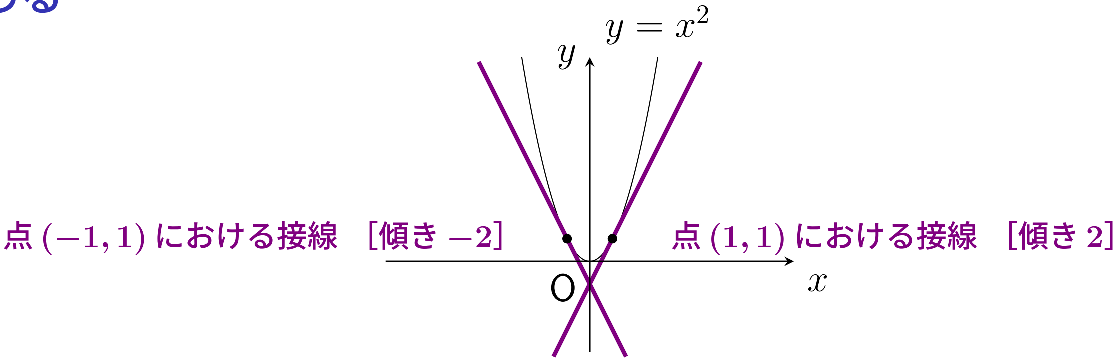
関数 $y = f(x)$ が $x = a$ において微分可能であるとき，微分係数 $f'(a)$ はグラフ上の点 $(a, f(a))$ での接線の傾きをあらわした．

例題 13-5　微分係数の符号と関数の増減との関係をたしかめる

関数 $y = f(x)$ が $x = a$ において微分可能であるとき，微分係数 $f'(a)$ はグラフ上の点 $(a, f(a))$ での接線の傾きをあらわした．

ここで，接線の傾きが負の値であれば，グラフはそこでは右下がりであり，接線の傾きが正の値であれば，グラフはそこでは右上がりである．

例題 13-5　微分係数の符号と関数の増減との関係をたしかめる



つまり，関数 $y = f(x)$ は，$f'(x) < 0$ である区間では減少し，$f'(x) > 0$ である区間では増加するということになる．

例題 13-5　微分係数の符号と関数の増減との関係をたしかめる

2 次関数 $f(x) = x^2$ について，$f'(x) < 0$ である区間では減少し，$f'(x) > 0$ である区間では増加することを確認してみよう．

例題 13-5　微分係数の符号と関数の増減との関係をたしかめる

2 次関数 $f(x) = x^2$ について，$f'(x) < 0$ である区間では減少し，$f'(x) > 0$ である区間では増加することを確認してみよう．

微分すると，$f'(x) = 2x$ となる．

例題 13-5　微分係数の符号と関数の増減との関係をたしかめる

2 次関数 $f(x) = x^2$ について，$f'(x) < 0$ である区間では減少し，$f'(x) > 0$ である区間では増加することを確認してみよう．

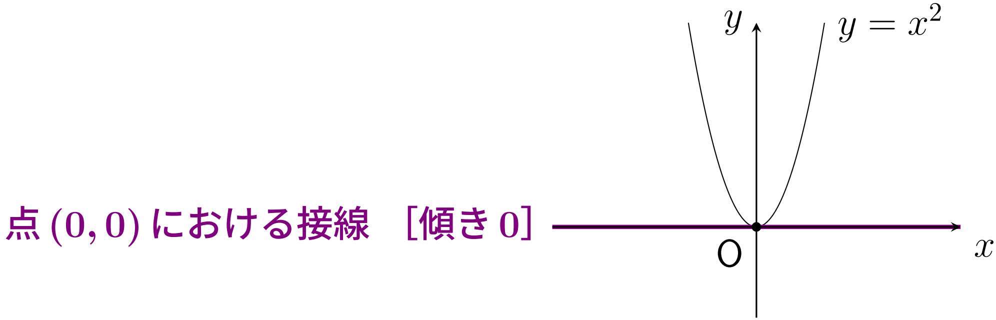
微分すると，$f'(x) = 2x$ となる．

よって，$f'(x)$ は $x = 0$ のときに 0 になり，$x = 0$ の前後で符号が変化する．

例題 13-5　微分係数の符号と関数の増減との関係をたしかめる

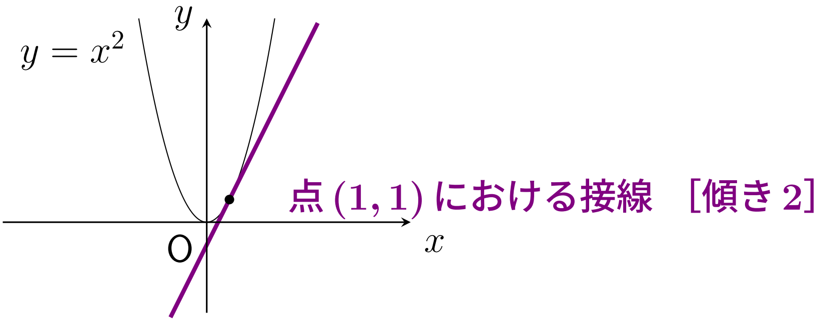
(i) $x < 0$ であるような x については $f'(x)\,(= 2x) < 0$（接線の傾きが負）であり，$f(x) = x^2$ は減少する．

例題 13-5　微分係数の符号と関数の増減との関係をたしかめる



(ii) $x = 0$ であるときは，$f'(0)\ (= 2 \times 0) = 0$（接線の傾きが 0）である．また，$f(0) = 0^2 = 0$ である．

例題 13-5　微分係数の符号と関数の増減との関係をたしかめる



(iii) $x > 0$ であるような x については $f'(x)\,(= 2x) > 0$（接線の傾きが正）であり，$f(x) = x^2$ は増加する．

例題 13-5　微分係数の符号と関数の増減との関係をたしかめる

このことを次のように表にまとめよう．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

例題 13-5　微分係数の符号と関数の増減との関係をたしかめる

このことを次のように表にまとめよう．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

このような，関数の増減についてまとめた表を増減表という．

例題 13-6　増減表をつくり 3 次関数のグラフをかく（$f'(x) = 0$ となる x が 2 つあるとき）

3 次関数 $f(x) = -x^3 - 3x^2$ について，微分すると，
$f'(x) = -3x^2 - 3 \times 2x = -3x^2 - 6x$ となる．

例題 13-6　増減表をつくり 3 次関数のグラフをかく（$f'(x)=0$ となる x が 2 つあるとき）

3 次関数 $f(x)=-x^3-3x^2$ について，微分すると，
$f'(x)=-3x^2-3\times 2x=-3x^2-6x$ となる．これは，

$$f'(x)=-3x(x+2)$$

と変形できる．

例題 13-6　増減表をつくり 3 次関数のグラフをかく（$f'(x) = 0$ となる x が 2 つあるとき）

3 次関数 $f(x) = -x^3 - 3x^2$ について，微分すると，
$f'(x) = -3x^2 - 3 \times 2x = -3x^2 - 6x$ となる．これは，

$$f'(x) = -3x(x+2)$$

と変形できる．よって，$x = -2$ または $x = 0$ のときに，$f'(x)$ は 0 になる．

例題 13-6　増減表をつくり 3 次関数のグラフをかく（$f'(x) = 0$ となる x が 2 つあるとき）

(i) $x < -2$ であるような x については $f'(x)\,(= -3x(x+2)) < 0$（接線の傾きが負）であり，$f(x) = -x^3 - 3x^2$ は減少する．

例題 13-6　増減表をつくり 3 次関数のグラフをかく（$f'(x)=0$ となる x が 2 つあるとき）

(i) $x<-2$ であるような x については $f'(x)\,(=-3x(x+2))<0$（接線の傾きが負）であり，$f(x)=-x^3-3x^2$ は減少する．

(ii) $x=-2$ であるときは，$f'(-2)=0$（接線の傾きが 0）である．また，$f(-2)=-(-2)^3-3\times(-2)^2=-4$ である．

例題 13-6　増減表をつくり 3 次関数のグラフをかく（$f'(x) = 0$ となる x が 2 つあるとき）

(iii) $-2 < x < 0$ であるような x については $f'(x)\,(= -3x(x+2)) > 0$ （接線の傾きが正） であり，$f(x) = -x^3 - 3x^2$ は増加する．

例題 13-6　増減表をつくり 3 次関数のグラフをかく（$f'(x) = 0$ となる x が 2 つあるとき）

(iii) $-2 < x < 0$ であるような x については $f'(x)\,(= -3x(x+2)) > 0$ （接線の傾きが正） であり，$f(x) = -x^3 - 3x^2$ は増加する．

(iv) $x = 0$ であるときは，$f'(0) = 0$（接線の傾きが 0） である．また，$f(0) = -0^3 - 3 \times 0^2 = 0$ である．

例題 13-6　増減表をつくり 3 次関数のグラフをかく（$f'(x) = 0$ となる x が 2 つあるとき）

(v) $x > 0$ であるような x については $f'(x)\,(= -3x(x+2)) < 0$（接線の傾きが負）であり，$f(x) = x^3 - 3x^2$ は減少する．

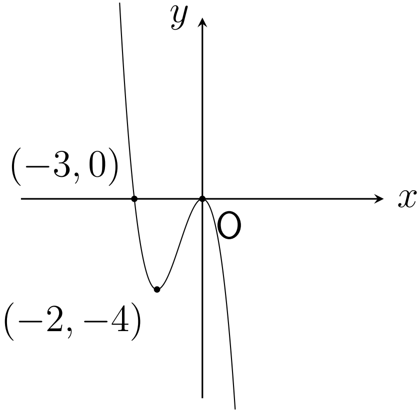
例題 13-6　増減表をつくり 3 次関数のグラフをかく（$f'(x) = 0$ となる x が 2 つあるとき）

(v) $x > 0$ であるような x については $f'(x)\,(= -3x(x+2)) < 0$（接線の傾きが負）であり，$f(x) = x^3 - 3x^2$ は減少する．

以上より，

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$

例題 13-6　増減表をつくり 3 次関数のグラフをかく（$f'(x)=0$ となる x が 2 つあるとき）



例題 13-6　増減表をつくり 3 次関数のグラフをかく（$f'(x) = 0$ となる x が 2 つあるとき）

ここで，$f(x) = -x^3 - 3x^2$ について，$f(x) = 0$ となるような 0 以外の x を求めると，

$$f(x) = -x^2(x+3) = 0$$

より，$x = -3$ となる．よって，グラフは点 $(-3, 0)$ を通ることがわかる．

例題 13-7　増減表をつくり 3 次関数のグラフをかく（$f'(x) = 0$ となる x が 1 つだけのとき）

3 次関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$ について，微分すると，
$f'(x) = 3x^2 + 3 \times 2x + 3 = 3x^2 + 6x + 3$ となる．

例題 13-7　増減表をつくり 3 次関数のグラフをかく（$f'(x)=0$ となる x が 1 つだけのとき）

3 次関数 $f(x)=x^3+3x^2+3x$ について，微分すると，
$f'(x)=3x^2+3\times 2x+3=3x^2+6x+3$ となる．これは，

$$f'(x)=3(x^2+2x+1)=3(x+1)^2$$

と変形できる．

例題 13-7　増減表をつくり 3 次関数のグラフをかく（$f'(x)=0$ となる x が 1 つだけのとき）

3 次関数 $f(x)=x^3+3x^2+3x$ について，微分すると，
$f'(x)=3x^2+3\times 2x+3=3x^2+6x+3$ となる．これは，

$$f'(x)=3(x^2+2x+1)=3(x+1)^2$$

と変形できる．よって，$x=-1$ のときに，$f'(x)$ は 0 になる．

例題 13-7　増減表をつくり 3 次関数のグラフをかく（$f'(x) = 0$ となる x が 1 つだけのとき）

（ i ）$x = -1$ であるときは，$f'(-1) = 0$（接線の傾きが 0）であり，
$f(-1) = (-1)^3 + 3 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) = -1$ である．

例題 13-7　増減表をつくり 3 次関数のグラフをかく（$f'(x)=0$ となる x が 1 つだけのとき）

(i) $x=-1$ であるときは，$f'(-1)=0$（接線の傾きが 0）であり，$f(-1)=(-1)^3+3\times(-1)^2+3\times(-1)=-1$ である．

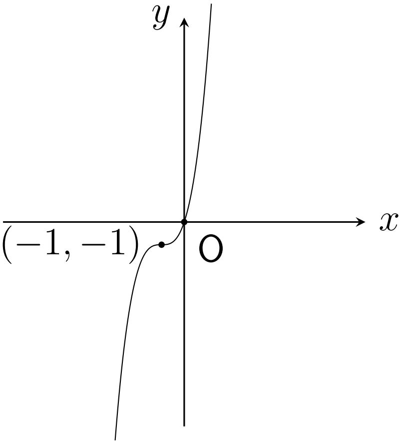
(ii) それ以外の x については $f'(x)\,(=3(x+1)^2)>0$（接線の傾きが正）であり，$f(x)=x^3+3x^2+3x$ は増加する．

例題 13-7　増減表をつくり 3 次関数のグラフをかく（$f'(x) = 0$ となる x が 1 つだけのとき）

以上より，

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$

例題 13-7　増減表をつくり 3 次関数のグラフをかく（$f'(x) = 0$ となる x が 1 つだけのとき）



例題 13-7　増減表をつくり 3 次関数のグラフをかく（$f'(x)=0$ となる x が 1 つだけのとき）

ここで，$f(x)=x^3+3x^2+3x$ について，
$f(0)=0^3+3\times 0^2+3\times 0=0$ なので，グラフは点 $(0,0)$ を通ることがわかる．

第14章　1変数関数の積分法

14.1　不定積分

例題 14-1　不定積分とは

微分したら関数 $f(x) = 2x$ になるような関数はどんなものか？

例題 14-1　不定積分とは

微分したら関数 $f(x) = 2x$ になるような関数はどんなものか？

たとえば，$F(x) = x^2$ とすると，$F'(x) = 2x$ となる．

例題 14-1　不定積分とは

微分したら関数 $f(x) = 2x$ になるような関数はどんなものか？

たとえば，$F(x) = x^2$ とすると，$F'(x) = 2x$ となる．

また，

$$F(x) = x^2 + \text{定数}$$

の形のものはどれも $F'(x) = 2x$ となる．

例題 14-1　不定積分とは

微分したら関数 $f(x) = 2x$ になるような関数はどんなものか？

たとえば，$F(x) = x^2$ とすると，$F'(x) = 2x$ となる．

また，

$$F(x) = x^2 + \text{定数}$$

の形のものはどれも $F'(x) = 2x$ となる．つまり，

$$F'(x) = f(x)$$

となる．

例題 14-1　不定積分とは

このような，微分したら f になるような関数 F は，f の原始関数とよばれる．

例題 14-1　不定積分とは

このような，微分したら f になるような関数 F は，f の原始関数とよばれる．

そして，原始関数たちをまとめて書いた

$F(x) + C$　（F は f の原始関数のひとつ，C は任意の定数）

は f の不定積分とよばれ，$\displaystyle\int f(x)\,dx$ とあらわされる．

例題 14-1　不定積分とは

つまり，

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

とすることになる．

例題 14-1　不定積分とは

つまり，

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

とすることになる．

たとえば，$F(x) = x^2$ は $f(x) = 2x$ の原始関数のひとつなので，

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

となる．

例題 14-1　不定積分とは

つまり，

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

とすることになる．

たとえば，$F(x) = x^2$ は $f(x) = 2x$ の原始関数のひとつなので，

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

となる．実際，$(x^2 + C)' = 2x$ となることがたしかめられる．

例題 14-1　不定積分とは

またたとえば，$F(x) = x^3$ は $f(x) = 3x^2$ の原始関数のひとつなので，

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

となる．

例題 14-1　不定積分とは

またたとえば，$F(x) = x^3$ は $f(x) = 3x^2$ の原始関数のひとつなので，

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

となる．実際，$(x^3 + C)' = 3x^2$ となることがたしかめられる．

例題 14-1　不定積分とは

関数 f の不定積分を求めることを，関数 f を積分するという．
ここで，任意の定数 C は積分定数とよばれる．

例題 14-1　不定積分とは

関数 f の不定積分を求めることを，関数 f を積分するという．
ここで，任意の定数 C は積分定数とよばれる．

右辺を微分することによって次をたしかめてみよう．

例題 14-1　不定積分とは

(1) $\displaystyle\int 1\,dx = x + C$

$(x+C)' = 1 + 0 = 1$ となることがたしかめられる．

例題 14-1　不定積分とは

(2) $\displaystyle\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$

$\displaystyle\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)' = \frac{1}{2} \times 2x + 0 = x$ となることがたしかめられる．

例題 14-1　不定積分とは

例題 14-1，問題 14-1 より，

$$\int 1\,dx = x + C,\quad \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C,\quad \int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C,$$

$$\int x^{-2}\,dx = -x^{-1} + C,\quad \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

例題 14-1　不定積分とは

一般にも，次が成り立つ．

積分公式

$$\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{(a+1)} + C \qquad (a\text{ は }-1\text{ ではない実数})$$

例題 14-1　不定積分とは

この公式より，

$a = 3$ とすると，$\displaystyle \int x^3\,dx = \frac{1}{3+1}x^{(3+1)} + C = \frac{1}{4}x^4 + C,$

例題 14-1　不定積分とは

この公式より，

$$a = 3 \text{ とすると，} \int x^3\,dx = \frac{1}{3+1}x^{(3+1)} + C = \frac{1}{4}x^4 + C,$$

$$a = 4 \text{ とすると，} \int x^4\,dx = \frac{1}{4+1}x^{(4+1)} + C = \frac{1}{5}x^5 + C$$

例題 14-1　不定積分とは

また，次が成り立つ．

積分の線型性

a，b を定数とし，$f(x)$，$g(x)$ を原始関数をもつ関数とするとき，次が成り立つ．

$$\int (a\,f(x) + b\,g(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$$

例題 14-1　不定積分とは

たとえば，

$$\begin{aligned}\int (5\,x^2 - 6x + 8)\,dx &= 5\int x^2\,dx - 6\int x\,dx + 8\int 1\,dx \\ &= 5 \times \frac{1}{2+1}x^{(2+1)} - 6 \times \frac{1}{1+1}x^{(1+1)} + 8 \times x + C \\ &= \frac{5}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + C\end{aligned}$$

例題 14-2　不定積分を求める

$$(1)\ \int 11x^2\,dx = 11 \times \int x^2\,dx$$

$$= 11 \times \frac{1}{2+1}x^{(2+1)} + C$$

$$= \frac{11}{3}x^3 + C$$

例題 14-2　不定積分を求める

(2) $$\int (3x^2 - 6x - 2)\,dx = 3 \times \int x^2\,dx - 6 \times \int x\,dx - 2 \times \int 1\,dx$$

$$= 3 \times \frac{1}{2+1} x^{(2+1)} - 6 \times \frac{1}{1+1} x^{(1+1)} - 2 \times x + C$$

$$= 3 \times \frac{1}{3} x^3 - 6 \times \frac{1}{2} x^2 - 2x + C$$

$$= x^3 - 3x^2 - 2x + C$$

例題 14-2　不定積分を求める

(3) $$\int \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) dx = -\frac{1}{2}\int x\,dx + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \int 1\,dx$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+1}x^{(1+1)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \times x + C$$

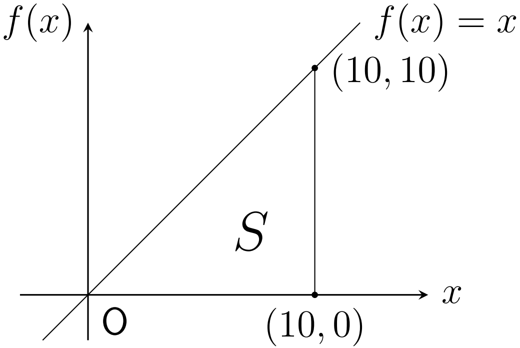
$$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \times x + C$$

$$= -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x + C$$

14.2　積分と面積の関係

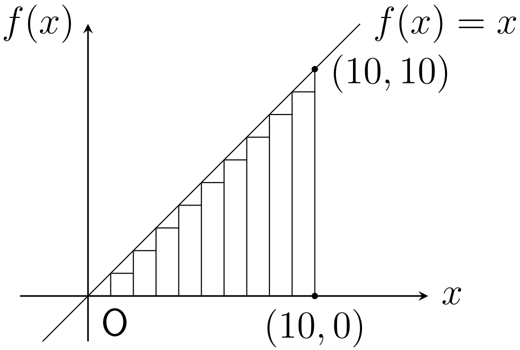
例題 14-3　図形を長方形の集まりで近似する

関数 $f(x) = x$ について，そのグラフと $x = 0$，$x = 10$ および x 軸で囲まれた図形の「大きさ」S の求め方を次のように考えよう．



例題 14-3　図形を長方形の集まりで近似する

まず，この図形を幅が 1 の 10 個の長方形の集まりで近似しよう．



例題 14-3　図形を長方形の集まりで近似する

長方形の面積（幅 $\times$ 高さ）は左から順番にそれぞれ

$$
\begin{array}{lllll}
1 \times f(0), & 1 \times f(1), & 1 \times f(2), & 1 \times f(3), & 1 \times f(4), \\
1 \times f(5), & 1 \times f(6), & 1 \times f(7), & 1 \times f(8), & 1 \times f(9)
\end{array}
$$

となる．

例題 14-3　図形を長方形の集まりで近似する

長方形の面積（幅 $\times$ 高さ）は左から順番にそれぞれ

$$
\begin{array}{lllll}
1 \times f(0), & 1 \times f(1), & 1 \times f(2), & 1 \times f(3), & 1 \times f(4), \\
1 \times f(5), & 1 \times f(6), & 1 \times f(7), & 1 \times f(8), & 1 \times f(9)
\end{array}
$$

となる．これらの面積の和は，S に近似していると考えられる．

例題 14-3　図形を長方形の集まりで近似する

長方形の面積（幅 $\times$ 高さ）は左から順番にそれぞれ

$$\begin{array}{lllll} 1 \times f(0), & 1 \times f(1), & 1 \times f(2), & 1 \times f(3), & 1 \times f(4), \\ 1 \times f(5), & 1 \times f(6), & 1 \times f(7), & 1 \times f(8), & 1 \times f(9) \end{array}$$

となる．これらの面積の和は，S に近似していると考えられる．

そして，分割をどんどん細かくしていって，長方形の幅を限りなく 0 に近づけていくと，それらの面積の和は限りなく S に近づくだろう．

例題 14-3　図形を長方形の集まりで近似する

この極限値は，関数 f の 0 から 10 までの定積分とよばれ，次のようにあらわされる．

$$\int_0^{10} f(x)\,dx$$

例題 14-3　図形を長方形の集まりで近似する

ここで，F を f の原始関数のひとつ（つまり，$F' = f$）とすると，

$$\int_0^{10} \boldsymbol{f(x)\,dx = F(10) - F(0)}$$

が成り立つことが知られている．

例題 14-3　図形を長方形の集まりで近似する

たとえば，$F(x) = \dfrac{x^2}{2}$ とすると，これは $f(x) = x$ の原始関数のひとつなので，

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{10}} \boldsymbol{f(x)\,dx = F(10) - F(0)} = \frac{10^2}{2} - \frac{0^2}{2} = 50$$

となる．

例題 14-3　図形を長方形の集まりで近似する

定積分

$a < b$ とし，$a \leq x \leq b$ の間で連続である関数 f について，上記のような「$a \leq x \leq b$ の間での関数 f のグラフと x 軸との間の図形を，限りなく細かく等分割された長方形の集まりで近似したときのそれらの面積の和の極限値」は次のように書かれる．

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

例題 14-3　図形を長方形の集まりで近似する

これは，a から b までの定積分とよばれる．このなかの a は下端，b は上端とよばれる．

例題 14-3　図形を長方形の集まりで近似する

$a > b$ の場合は，次のように定義される．

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

例題 14-3　図形を長方形の集まりで近似する

$a > b$ の場合は，次のように定義される．

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

また，任意の関数 f に対し，次のようにすると決められている．

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

例題 14-3　図形を長方形の集まりで近似する

$a \le x \le b$ の間で連続である関数 f の原始関数のひとつを F とすれば，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

が成り立つことが知られている．

例題 14-4　上端が変数である定積分を計算する

関数 $f(t) = t$ について，$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ を求めてみよう．

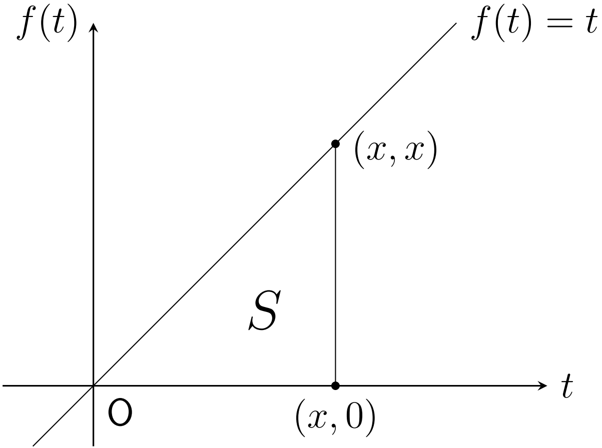
例題 14-4　上端が変数である定積分を計算する

関数 $f(t) = t$ について，$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ を求めてみよう．

たとえば，$F(t) = \dfrac{t^2}{2}$ は $f(t) = t$ の原始関数のひとつなので，次のようになる．

$$\int_0^x f(t)\,dt = F(x) - F(0) = \frac{x^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{x^2}{2}$$

例題 14-4　上端が変数である定積分を計算する



14.3　定積分

例題 14-5　定積分の性質を確認する

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

について，右辺の $F(a) - F(b)$ を $[F(x)]_a^b$ と表記することもある．

例題 14-5　定積分の性質を確認する

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

について，右辺の $F(a) - F(b)$ を $[F(x)]_a^b$ と表記することもある．

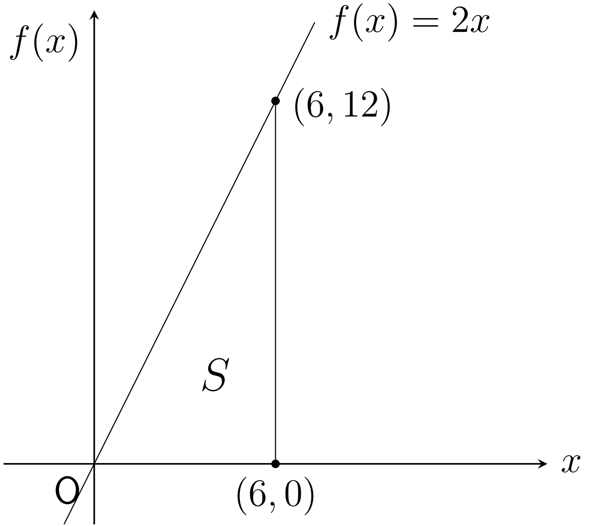
たとえば，$F(x) = x^2$ は $f(x) = 2x$ の原始関数のひとつなので，次のように表記することもある．

$$\int_0^1 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1$$

例題 14-5　定積分の性質を確認する

(1) $\displaystyle\int_0^6 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^6 = 6^2 - 0^2 = 36$

例題 14-5　定積分の性質を確認する



例題 14-5　定積分の性質を確認する

(2) $\displaystyle\int_{6}^{0} 2x\,dx = \left[x^2\right]_6^0 = 0^2 - 6^2 = -36$

例題 14-5　定積分の性質を確認する

(2) $\displaystyle\int_6^0 2x\,dx = \left[x^2\right]_6^0 = 0^2 - 6^2 = -36$

(3) $\displaystyle\int_6^6 2x\,dx = \left[x^2\right]_6^6 = 6^2 - 6^2 = 0$

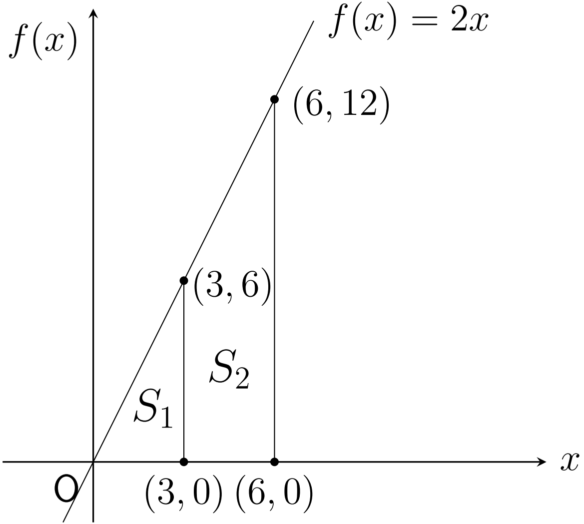
例題 14-5　定積分の性質を確認する

問題 14-6 から，

$$\int_0^6 2x\,dx = \int_0^3 2x\,dx + \int_3^6 2x\,dx$$

となることがわかる．

例題 14-5　定積分の性質を確認する



例題 14-5　定積分の性質を確認する

一般にも，連続関数 f について次が成り立つ．

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

例題 14-5　定積分の性質を確認する

また，a，b を定数とし，$f(x)$，$g(x)$ を $c \leq x \leq d$ の間で連続な関数とするとき，次のように計算することができる．

$$\int_c^d (a\,f(x) + b\,g(x))\,dx = a\int_c^d f(x)\,dx + b\int_c^d g(x)\,dx$$

例題 14-6　定積分の値を求める

(1) $\int_0^5 (3x^2 + 4x)\,dx$

$$= \left[3 \times \frac{1}{2+1} x^{(2+1)} + 4 \times \frac{1}{1+1} x^{(1+1)}\right]_0^5$$

$$= \left[x^3 + 2x^2\right]_0^5$$

$$= 5^3 + 2 \times 5^2 - (0^3 + 2 \times 0^2) = 175$$

例題 14-6　定積分の値を求める

(2) $\displaystyle\int_1^3 (9x^2 - 6x - 3)\, dx$

$$= \left[9 \times \frac{1}{2+1}x^{2+1} - 6 \times \frac{1}{1+1}x^{1+1} - 3 \times x\right]_1^3$$

$$= \left[3x^3 - 3x^2 - 3x\right]_1^3$$

$$= 3 \times 3^3 - 3 \times 3^2 - 3 \times 3 - (3 \times 1^3 - 3 \times 1^2 - 3 \times 1)$$

$$= 81 - 27 - 9 - (3 - 3 - 3) = 48$$

例題 14-6　定積分の値を求める

(3) $\displaystyle\int_{-10}^{10} (6x^2 + 1)\,dx$

$$= \left[6 \times \frac{1}{2+1} x^{2+1} + x\right]_{-10}^{10} = \left[2x^3 + x\right]_{-10}^{10}$$

$$= 2 \times 10^3 + 10 - (2 \times (-10)^3 + (-10))$$

$$= 2 \times 1000 + 10 - (2 \times (-1000) - 10)$$

$$= 2010 - (-2010) = 4020$$