New paradigm! On-demand publishing


著者：平鍋 健児
Kenji Hiranabe


# 図解 線形代数

## ストラング流直感的理解

# 解答付き問題集


初版: 2026-4-1 更新: 2026-04-15


書籍『図解線形代数：ストラング流直感的理解』の付録として、本文中の問とそれに対する解答をまとめました。問も再掲することで、この冊子だけでも読めるようにしています。


X: @hiranabe, hiranabe@mail.com, `https://anagileway.com`

**表紙の問題**

本ドキュメントの表紙にはモンドリアン風のデザインが描かれていますが、このページから全ての文字を取り去ったとして、1 つの行列と見立てます。色は別の数字とします。この行列のランクを求めて下さい。解答は、このドキュメントの最後に記載しています。

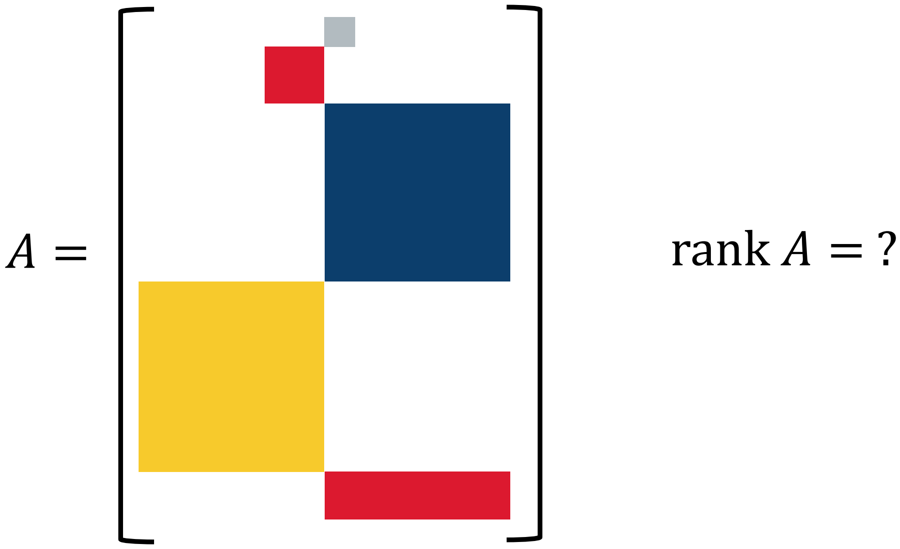


図 1: 表紙の問題

# 目 次

# 1　数ベクトルと行列

**問 1.1（p.21）**　ベクトル $\boldsymbol{u} = (1, 2, 0), \boldsymbol{v} = (2, -1, 0)$ の内積とそれぞれのノルムを求めよ。これら両方に直交する $\boldsymbol{w}$ を求めよ。

**答**　$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = 0, \|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$。$\boldsymbol{w} = (x, y, z)$ として $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 2x - y = 0, \quad \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = x + 2y = 0$ を解くと、$x = y = 0$ となり、$z$ は任意。従って $\boldsymbol{w} = (0, 0, 1)$ が取れる。$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ はともに $xy$ 平面内のベクトルなので、$\boldsymbol{w}$ を $z$ 軸に取ることも直感的に理解できる。

**問 1.2（p.21）**　(4) の三角不等式を証明しなさい（ヒント：両辺を 2 乗した後、(3) シュワルツの不等式を使う)。

**答**　(4) の三角不等式、$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ を証明する。

*Proof.* 左辺の 2 乗を計算すると、

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 &= (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \\
&= \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} + \|\boldsymbol{v}\|^2 \\
&\leq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| + \|\boldsymbol{v}\|^2 \\
&\leq \|\boldsymbol{u}\|^2 + 2\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{v}\|^2 = (\|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|)^2
\end{aligned}$$

途中の不等式でシュワルツの不等式（$|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| \leq \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$）を用いた。最後に、両辺の平方根を取って、$\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$ が得られる。等号成立は、最初の不等式より $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \geq 0$（同じ方向）かつ、次の不等式（シュワルツの不等式）より $\boldsymbol{u} // \boldsymbol{v}$ のときのみ。 □

**問 1.3（p.32）**　(1) 次の行列列の積 $AB, BA$ を計算せよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 零行列の性質 1.10（p.30）の 3 行目（積は $O$）を確認せよ。

**答**　(1) 行列の積の図 1.5（p.32）（以下に再掲）に従って計算。

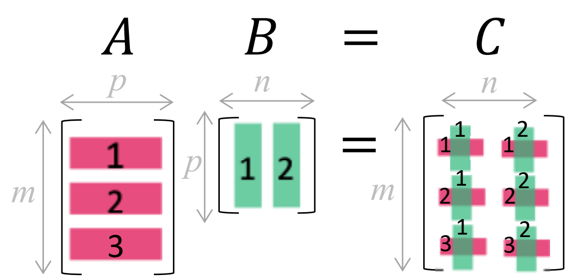


図 1.5　(p.32) 行列の積

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 同様に図に従って計算。$A$, $B$ のどちらが零行列でも、積の各成分は 0 と計算でき、零行列になる。

**問 1.4（p.32）**　適当な $3 \times 2$ 行列について、転置の性質 1.6 の最後（積の転置は転置の積）を確認せよ。

**答**　$(AB)^\top = B^\top A^\top$ を確認する。

上記の図 1.5 の右辺を転置して見る。そして、左辺の転置（$AB$ の転置は順序を変えた $B^\top A^\top$）を計算ると、結果が同じになることがわかる。$B$ の列（緑）が転置で横ベクトルに、$A$ の行（赤）が転置で縦ベクトルになる。

# 2　図で見る行列計算

**問 2.1（p.40）**　ベクトル $\boldsymbol{u} = (1, 2), \boldsymbol{v} = (3, 4)$ について、内積 $\boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{v}$ と外積 $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top$ を求めよ。

**答**

$$\text{内積:} \quad \boldsymbol{u}^\top \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11$$

$$\text{外積:} \quad \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 & 1 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

**問 2.2（p.41）**　$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ について、$A\boldsymbol{v}$ を計算せよ。

**答**　$A\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$

**問 2.3（p.42）**　次の行列 $A$ とベクトル $\boldsymbol{v}$ について、$A\boldsymbol{v}$ を $A$ の列ベクトルの線形結合として表現し、計算せよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

**答**　$A\boldsymbol{v} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 \\ 3+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \end{bmatrix}$

**問 2.4（p.44）**　次の行列 $A$ とベクトル $\boldsymbol{v}$ について、$\boldsymbol{v}^\top A$ を $A$ の行ベクトルの線形結合として表現し、計算せよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}^\top = \begin{bmatrix} 1\ 2 \end{bmatrix}$$

**答**　$\boldsymbol{v}^\top A = 1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 2+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \end{bmatrix}$

**問 2.6（p.48）** 次の行列 $A, P$ について、$AP$ を計算せよ。新しい列はもとの列のどのような線形結合になっているか。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**答**

$$\begin{aligned} AP &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} & 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

新しい 1 列目はもとの 2 列目、新しい 2 列目はもとの 1 列目と 2 列目の和になっている。

**問 2.7（p.51）** 次の行列 $P, A$ について、$PA$ を計算せよ（前の問の $P$ を今度は左から掛けている）。新しい行はもとの行のどのような線形結合になっているか。

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

**答**

$$\begin{aligned} PA &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0[1\ 2] + 1[3\ 4] \\ 1[1\ 2] + 1[3\ 4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

新しい 1 行目はもとの 2 行目、新しい 2 行目はもとの 1 行目と 2 行目の和になっている。

**問 2.8（p.51）** $3 \times 3$ 行列 $A$ の各行を、1 倍、2 倍、3 倍して新しい行列 $A'$ を作るには、どんな行列 $P$ を $A$ のどちら側から掛ければよいか。また、$P$ を $A$ の反対側から掛けると、どんな行列ができるか。

**答** 式 (P2')、p.51 より、$P = \mathrm{diag}(1, 2, 3)$ を左から掛けた $PA$ が求める $A'$ になる（行変形）。

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & \boldsymbol{a}_1^* & - \\ - & \boldsymbol{a}_2^* & - \\ - & \boldsymbol{a}_3^* & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & 1\boldsymbol{a}_1^* & - \\ - & 2\boldsymbol{a}_2^* & - \\ - & 3\boldsymbol{a}_3^* & - \end{bmatrix} = A'$$

$P$ を $A$ の反対側（右）から掛けると、 式 (P1')、p.49 より $AP$ は $A$ の**各列**がそれぞれ 1 倍、2 倍、3 倍された行列になる（列変形）。

$$AP = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ 1\boldsymbol{a}_1 & 2\boldsymbol{a}_2 & 3\boldsymbol{a}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

**問 2.10（p.58）**　$i$ 番目の標準基底を $\boldsymbol{e}_i$ と書く時、行列 $A$ に対して次の式は何を意味するか？

$$(1)\ A\boldsymbol{e}_1 \quad (2)\ \boldsymbol{e}_1^\top A \quad (3)\ \boldsymbol{e}_i^\top A\boldsymbol{e}_j$$

**答**　それぞれが、$\boldsymbol{e}$ の添字に対応する列ベクトル、行ベクトル、成分に対応する。

(1) $A\boldsymbol{e}_1$ は $A$ の 1 列目の列ベクトル、すなわち $A\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}_1$

(2) $\boldsymbol{e}_1^\top A$ は $A$ の 1 行目の行ベクトル、すなわち $\boldsymbol{e}_1^\top A = \boldsymbol{a}_1^*$

(3) $\boldsymbol{e}_i^\top A\boldsymbol{e}_j$ は $A$ の $(i,j)$ 成分、すなわち $\boldsymbol{e}_i^\top A\boldsymbol{e}_j = a_{ij}$

**問 2.11（p.59）**　(1) 任意の $n$ 次正方行列 $A$ について $XA = \alpha A$ となるような行列 $X$ は、$n$ 次スカラー行列 $\alpha I$ のみであることを示せ。(2) 任意の行列 $n$ 次正方行列 $A$ について $AX = XA$ となるような行列 $X$ は、$n$ 次スカラー行列 $\alpha I$ のみであることを示せ。
**ヒント** $I_{ij}$ を $(i,j)$ 成分のみ 1 で他の成分を 0 とする行列とする。例えば $A = I_{11}$ として両辺を計算してみよ。

**答**　「任意の $A$ について成り立つ」とあるので、このような問題では特殊な行列（なるべく 0 が多い）を $A$ に代入して成り立つ事実を積み上げていけばよい。定理 2.1（p.57）の証明の要領である。下準備として、$A = I_{11}$ として $XA, AX$ を計算すると、式 (P1)（p.48）、式 (P2)（p.50）を使って、$n = 3$ の場合で書くと、

$$XA = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & 0 \\ x_{21} & 0 & 0 \\ x_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{*1}$$

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & \boldsymbol{x}_1^* & - \\ - & \boldsymbol{x}_2^* & - \\ - & \boldsymbol{x}_3^* & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - & \boldsymbol{x}_1^* & - \\ - & \boldsymbol{0}^\top & - \\ - & \boldsymbol{0}^\top & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{*2}$$

となる。これを使って、(1),(2) を順に証明する。

*Proof.* (1) $XA = \alpha A$ において、式 (*1) より左辺は $X$ の 1 列目のみそのままで他の列はすべて 0、右辺は $\alpha I_{11}$ となるので、

$$XA = \alpha A$$
$$\begin{bmatrix} x_{11} & 0 & 0 \\ x_{21} & 0 & 0 \\ x_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

よって、$x_{11} = \alpha, x_{21} = x_{31} = 0$ となる。同様に $I_{22}$ とすれば、2 列目は $x_{22} = \alpha$ で他の成分は 0 である。これを続けていけば、$X$ はすべての列で対角成分のみ $\alpha$ で、他の成分は 0 となる。　□

なお、よりシンプルな別解として最初から $A = I$ という特殊ケースを考えればよかったことに気づく。すなわち、$XA = \alpha A$ の両辺に代入すると、$X = \alpha I$ が必要条件であることが分かる。もちろん十分条件でもある。同じように、$X, A$ の掛ける順番を逆にして、任意の $A$ に対して $AX = \alpha A$ となる行列 $X$ も $\alpha I$ のみである。

*Proof.* (2) 式 (1*),(2*) から、左辺は $X$ の 1 行目のみが残り、右辺は 1 列目のみが残る。

$$AX = XA$$
$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & 0 & 0 \\ x_{21} & 0 & 0 \\ x_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となって、$X$ の 1 行目と 1 列目の成分は、対角成分の $x_{11}$ を除いて 0 であることが分かる。同様に、$A = I_{22}$ とすれば、$X$ の 2 行目と 2 列目の成分が対角成分 $x_{22}$ を除いて 0 であることが分かる。このように、$A = I_{33}, \ldots, I_{nn}$ として、$X$ の対角成分以外はすべて 0 であることが分かる。

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & & \\ & x_{22} & \\ & & x_{33} \end{bmatrix} \tag{1}$$

次に、これらの対角成分が等しいことを示すために $A = P_{12}$ とする。

$$P_{12} = \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$P_{12}$ は単位行列の 1 行目と 2 行目を入れ替えた置換行列（4.2、p.113）であり、左から掛けると $X$ の 1 行目と 2 行目が入れ替わる。右から掛けると、$X$ の 1 列目と 2 列目が入れ替わる。$AX = XA$ において $X$ に式 (1)、$A$ に式 (2) の $P_{12}$ を使って両辺を計算すると、

$$P_{12}X = XP_{12}$$
$$\begin{bmatrix} & x_{22} & \\ x_{11} & & \\ & & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & x_{11} & \\ x_{22} & & \\ & & x_{33} \end{bmatrix}$$

より、$x_{11} = x_{22}$ が分かる。同様に、$A = P_{23}$ とすれば、$x_{22} = x_{33}$ が分かる。これを続けていくことで、すべての対角成分の値が等しいことがいえ、それを $\alpha$ とすれば、

$$x_{11} = x_{22} = \cdots = x_{nn} = \alpha, \quad \text{他の成分は } 0$$

すなわち、$X = \alpha I$ となる。 □

なお、証明の中で $P_{12}$ の代わりに $I_{12} + I_{21}$ などの他の組み合わせを用いても同じ結論を導くことができる。

### 問 2.12（p.62）　$A$ の逆行列が存在するとき、一意であることを示せ。

**答**　これがいえてはじめて、逆行列を $A^{-1}$ と（一意を前提に）書くことができる。この証明も巧妙である。

*Proof.* $X$ を $AX = XA = I$ を満たす逆行列とし、もう 1 つ $AY = YA = I$ を満たす $Y$ が存在するとき、

$$X = IX = (YA)X = Y(AX) = YI = Y$$

となり、最初と最後を見て $X = Y$ が成り立つ。なわち、逆行列は $A$ に対して一意。 □

行列の結合則をうまく使った証明になっている。実際、行列ではこの結合則すなわち、積の演算順序を「かっこ」の付け替えによって行うことだけで証明できることが多い。不思議な感じもするが、線形代数が代数といわれる所以でもある。

**問 2.13（p.63）**　2 次正方行列の逆行列は、$ad - bc \neq 0$ のとき、

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

であることが知られている。計算で $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ を確かめよ。

**答**　実際に計算してみればよい。

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = I$$
$$A^{-1}A = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = I$$

# 3　部分空間・線形変換

**問 3.1（p.68）**　次の 2 つの命題を証明せよ。
(1) 零ベクトル $\mathbf{0}$ を含む任意のベクトルの集合は線形従属である
(2) 線形従属なベクトル集合の中の少なくとも一つのベクトルは、他のベクトルの線形結合で表現できる

**答**　このような一見簡単もしくは当然のように思える問題に自分で証明を考えることは、純粋数学的理解の構築に繋がります。

*Proof.* (1) は、$\mathbf{0}$ を含むベクトルの集合の線形結合を考えて、$\mathbf{0}$ の係数を非零に、他のベクトルの係数をすべて零にして足し合わせた式が $\mathbf{0}$ になることから簡単にいえる。すなわち、定義に従ってベクトルの集合 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の線形関係式、

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{v}_k = \mathbf{0} \tag{*1}$$

を考え、$\boldsymbol{v}_1 = \mathbf{0}$ とすると、$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ という非自明な解が存在する。よって、線形従属。

(2) では、線形従属の定義から式 (*1) に $\alpha_i \neq 0$ となる $\alpha_i$ が必ず 1 つ存在する。$\boldsymbol{v}_i$ が $\boldsymbol{v}_1$ となるように 2 つのベクトルの並び順を交換して、$\alpha_1 \neq 0$ で式を割り算すると、

$$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{v}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\boldsymbol{v}_3 - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\boldsymbol{v}_k$$

と書くことができ、$\boldsymbol{v}_1$（もとの $\boldsymbol{v}_i$） が他のベクトルの線形結合として表現できる。 □

**問 3.2（p.68）**　$\boldsymbol{u} = (1, 2), \boldsymbol{v} = (2, 3), \boldsymbol{w} = (2, 4)$ のとき、定義に従って、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が線形独立であることを示せ。また、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}$ はどうでしょう？

**答**　定義に従って、実際に $\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ という線形関係式を仮定すると、2 つ式からなる連立一次方程式ができる。

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

すなわち、

$$\alpha+2\beta=0$$
$$2\alpha+3\beta=0$$

この連立方程式を解くと、$\alpha=\beta=0$ という自明解のみが解である。したがって、$\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ は線形独立。次に、$\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}$ を考えると、同じように 2 つの連立方程式は、

$$\alpha\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

すなわち、

$$\alpha+2\beta=0$$
$$2\alpha+4\beta=0$$

となり、この連立方程式には $\alpha=2,\beta=-1$ という非自明な解が存在する。つまり、$2\boldsymbol{u}+(-1)\boldsymbol{w}=\boldsymbol{0}$ と非自明な線形関係式が存在し、線形従属であることが分かる。

ただ、よく見ると $\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}$ は平行。$\boldsymbol{w}=2\boldsymbol{u}$ となって、$\boldsymbol{w}$ が $\boldsymbol{u}$ の線形結合で表されており、線形従属であることが目で見て分かるだろう。

**問 3.3（p.69）**　上記の平面（$ax+by+cz=0$）が部分空間であることを証明せよ。

**答**　和とスカラー倍が同じ平面上にあることを示せばよいでしょう。

*Proof.* 平面に属する 2 つのベクトル $\boldsymbol{u}=(x,y,z)$ と $\boldsymbol{v}=(x',y',z')$ を取り、和とスカラー倍が同じ平面上にあることを示せばよい。$ax+by+cz=0$ と $ax'+by'+cz'=0$ が成り立つので、これらの式を足し合わせると、$a(x+x')+b(y+y')+c(z+z')=0$ となり、$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(x+x',y+y',z+z')$ も平面上にあることが分かる。スカラー倍も同様。さらに、$\boldsymbol{0}$ も平面上にあるので、部分空間の条件を満たす。和とスカラー倍が平面上にあることが示されたので、この平面は部分空間。

あるいは、平面の法線ベクトルが $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$ なので、、平面上のベクトル $\boldsymbol{u}=(x,y,z)$ は内積 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u}=0$ を満たす、と捉えてもよい。$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=0$、$\boldsymbol{n}\cdot(\alpha\boldsymbol{u})=\alpha(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})=0$ となり、和とスカラー倍が平面上にあることが分かる。この議論は、後の章の零空間の議論と関連する。 □

**問 3.4（p.70）**　3 次元空間における、部屋の床と一つの壁をそれぞれ 2 次元平面 $U,V$ とする。$U$ と $V$ の交差 $U\cap V$ 上に原点 $O$ を取った時、$U\cap V$ は部分空間であり、$U$ と $V$ の合併 $U\cup V$ は一般には部分空間でないことを示せ。

**答**　$U$ も $V$ も原点 $O$ を含む平面であり 3 次元空間の部分空間である。$U\cap V$ は部分空間（$O$ を通る直線 $l$）になる。$l$ 上の任意のベクトルの和とスカラー倍は $l$ 上にあるので、部分空間の条件を満たす。しかし、$U\cup V$（+ を引き延ばしたような形）は部分空間ではない。床上のベクトルと壁上のベクトルを足すと、床にも壁にもない 3 次元空間のベクトルになって $U\cup V$ からはみ出てしまう。$U\cup V$ はベクトルの和について閉じていないことから、部分空間ではない。

**問 3.5（p.79）**　次のベクトルの集合は、$\mathbb{R}^2$ の (1) 独立系か、(2) 生成系か、(3) 基底か。

$$①\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\},\ ②\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\},\ ③\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\},\ ④\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\}$$

**答**　それぞれについて、
① 独立系だが、生成系でない。基底でない。
② 独立系かつ、生成系。基底である。
③ 独立系でなく、生成系でない。基底でない。
④ 生成系だが、独立系でない。基底でない。

**問 3.6（p.82）**　上記定理を証明せよ。

**答**　証明すべき定理は、以下。

**定理 3.13 正方行列の可逆性と列の線形独立性（p.82）**　$n$ 次正方行列 $A$ の列ベクトルが線形独立であることと、$A$ が可逆であることは、同値である。

*Proof.*（$\Longrightarrow$）$A$ の列ベクトルは $n$ 本の線形独立なベクトルなので、$\mathbb{R}^n$ の基底である（定理 3.8、p.79）。よって、$\mathbb{R}^n$ 内の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ は必ず $A$ の列ベクトル基底によって一意に座標表示することができる（定理 3.9、p.79）。具体的には、$A\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{e}_i$ を解いて（基底なので必ず解ける）$\boldsymbol{x}_i$ を求めれば、それが $A$ の列ベクトル基底における $\boldsymbol{e}_i$ の座標である。

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_n\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_i = A\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{e}_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

$n$ 本を横に並べて行列で書けば、

$$\begin{bmatrix}A\boldsymbol{x}_1 & A\boldsymbol{x}_2 & \cdots & A\boldsymbol{x}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \cdots & \boldsymbol{e}_n\end{bmatrix}$$

$X = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \cdots\ \boldsymbol{x}_n]$ として、

$$AX = I$$

すなわち、$AX = I$ となる $X$ が存在して、定理 2.2（p.62）より、$XA = I$ も成り立つことが分かる。以上より、$A$ は可逆であり、$A^{-1} = X$。 □

**問 3.7（p.86）**　$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を、$f(\boldsymbol{e}_1) = (2, 3), f(\boldsymbol{e}_2) = (-1, 4)$ と変換する線形変換とする。この変換の表現行列 $A$ を求めよ。

**答**　$f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2)$ を列ベクトルとして並べればよい。

$$A = \begin{bmatrix}f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -1\\3 & 4\end{bmatrix}$$

**問 3.8（p.91）** $V = W = \mathbb{R}^2$ とし、変換 $f : V \to W$ を、線形変換とする。$f(\boldsymbol{e}_1) = (3,4), f(\boldsymbol{e}_2) = (5,2)$ とするとき、

(1) この変換の両方の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ による表現行列 $A$ を求めよ。

(2) 入力側 $V$ の基底 $(\boldsymbol{v}) = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$、出力側 $W$ の基底 $(\boldsymbol{w}) = \{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ による表現行列 $A'$ を求めよ。ただし、$\boldsymbol{v}_1 = (1,1), \boldsymbol{v}_2 = (1,-1), \boldsymbol{w}_1 = (1,0), \boldsymbol{w}_2 = (0,2)$。

**答** (1) 標準基底による表現行列 $A$ は、基底の変換先を並べればよい。

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 \end{bmatrix} A, \quad A = \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

(2) 定義 3.13（p.88）より、

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{v}_1) & f(\boldsymbol{v}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 \end{bmatrix} A'$$

となる。ここから $A'$ を求める。各成分を代入すると、

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} A'$$

となる。左辺に右辺の基底行列の逆行列を左から掛けて、

$$A' = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

**問 3.9（p.97）** 線形変換 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対して、入力側 $\mathbb{R}^2$ の基底 $(\boldsymbol{v})$、出力側 $\mathbb{R}^2$ の基底 $(\boldsymbol{w})$ をともに標準基底とし、変換 $f$ の $(\boldsymbol{v}), (\boldsymbol{w})$（標準基底）に関する表現行列を $A$ とする。また、$A$ および別の基底 $(\boldsymbol{v}')$, $(\boldsymbol{w}')$ を次のように定める。

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}'_1 = \boldsymbol{w}'_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}'_2 = \boldsymbol{w}'_2 = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

このとき、$(\boldsymbol{v}), (\boldsymbol{w})$ から $(\boldsymbol{v}'), (\boldsymbol{w}')$ への基底の取り替え行列 $P$ を求め、基底 $(\boldsymbol{v}'), (\boldsymbol{w}')$ に関する $f$ の表現行列 $A'$ を求めよ。

**答** 基底 $(\boldsymbol{v})$ から $(\boldsymbol{v}')$ への基底の取り替え行列 $P$ は、

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{v}'_1 & \boldsymbol{v}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

であり、出力側も同じ基底の取り替え行列 $P$ となる。この行列は回転を表す行列であり、可逆（$\det(P) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$）でその逆行列は転置行列になる。

次に、表現行列を求める。まず、基底の行き先からコツコツと計算する方法で求める。$(\boldsymbol{v}), (\boldsymbol{w})$ による $A$ 表現行列を書き下すと、

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{v}_1) & f(\boldsymbol{v}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1 & \boldsymbol{w}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{*1}$$

(1)

となる。基底 $(\boldsymbol{v}')$, $(\boldsymbol{w}')$ による変換の式は、

$$\begin{bmatrix} f(\boldsymbol{v}_1') & f(\boldsymbol{v}_2') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1' & \boldsymbol{w}_2' \end{bmatrix} A' \tag{*2}$$

から、$A'$ を求める。まず、基底の変換先式、すなわち (1*) の左辺を計算すると、

$$f(\boldsymbol{v}_1') = f(\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2\cos\theta \\ 3\sin\theta \end{bmatrix}, \quad f(\boldsymbol{v}_2') = f(\begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -2\sin\theta \\ 3\cos\theta \end{bmatrix}$$

これらそれぞれを、$(\boldsymbol{w}')$ 基底で表せば、それが $A'$ である。すなわち、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f(\boldsymbol{v}_1') & f(\boldsymbol{v}_2') \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{w}_1' & \boldsymbol{w}_2' \end{bmatrix} A' \\ \begin{bmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta \\ 3\sin\theta & 3\cos\theta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} A' \end{aligned}$$

となる $A'$ を求める。$P^{-1}$ を左から掛けて、左辺と右辺を交換すると、

$$\begin{aligned} A' &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\cos\theta & -2\sin\theta \\ 3\sin\theta & 3\cos\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cos^2\theta + 3\sin^2\theta & (-2+3)\sin\theta\cos\theta \\ (-2+3)\sin\theta\cos\theta & 2\sin^2\theta + 3\cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & 2+\cos^2\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。また、定理 3.17（p.97）をそのまま使えば、

$$\begin{aligned} A' &= P^{-1}AP \\ &= \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & 2+\cos^2\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。

**解説**　この例では、$(\boldsymbol{v}'), (\boldsymbol{w}')$ がともに標準基底を $\theta$ 回転した基底であり、$A$ は $x, y$ 軸方向にそれぞれ 2 倍、3 倍に伸縮する変換です。$(\boldsymbol{v}'), (\boldsymbol{w}')$ に関する表現行列 $A'$ が、$P^{-1}AP$ となることは次のように解釈できます。

基底 $(\boldsymbol{v}'), (\boldsymbol{w}')$ の座標として表された変換前のベクトル $\boldsymbol{x}'$ は、左から $P$ を掛けることで標準基底での座標 $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{x}'$ に変換されます。次に、$A$ を掛けることで $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 方向の伸縮が行われ、最後に左から $P^{-1}$ を掛けることで、標準基底から基底 $(\boldsymbol{w}')$ に変換されます。これらの行列を $\boldsymbol{x}'$ に順に左から書けることで、最終的な変換先が得られます。$\dashrightarrow$ で基底の取り替えを、$\mapsto$ で変換 $f$ を示します。

$$\begin{array}{ccccccc} \boldsymbol{x}' & \dashrightarrow & \boldsymbol{x} & \mapsto & \boldsymbol{y} & \dashrightarrow & \boldsymbol{y}' \\ & & (= P\boldsymbol{x}') & & (= A\boldsymbol{x}) & & (= P^{-1}\boldsymbol{y}) \end{array}$$

となって、$A' = P^{-1}AP$ が最終的に得られます。

図 3.3（p.96）で、左下からはじめて $P$ で左上に上がり、$A$ で右上に移動し、$P^{-1}$ で右下に降りる操作を考えると分かりやすいでしょう。そして、これらの行列を右から順に並べて $A' = P^{-1}AP$ となるのです。

この例の場合、$A$ が対角行列という特殊な形をしていますが、$A'$ は一般の行列の形をしています。$A$ のように対角行列になった変換は、それぞれの基底方向に独立に伸縮する変換の合成となって意味がはっきりと分かります。逆に、一般の行列の基底を取り替えることによって、変換行列を対角行列にすることができれば、変換の性質を各基底それぞれの方向の伸縮として理解しやすくなります。この問題では、先に対角行列を与えてから回転によって基底を取り替えましたが、逆に、一般の行列から基底を適切に取り替えて対角行列にすることが重要になります。このテーマは第 7 章の固有値分解、第 8 章の特異値分解で詳しく扱います。

# 4　$LU$ 分解と連立一次方程式

**問 4.1（p.115）**　行列 $A$ をガウスの消去法と $LU$ 分解それぞれを使って行階段形 $A_{ref}$ にせよ。さらに、ガウス・ジョルダンの消去法で簡約行階段形 $A_{rref}$ にせよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

**答**　ガウスの消去法にて、行階段形（REF）まで。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} ② := ② - 2 \times ① \\ ③ := ③ - 1 \times ① \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} ③ := ③ - 1 \times ② \\ ④ := ④ - 1 \times ② \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} ④ := ④ - 2 \times ③ \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

さらに、簡約行階段形（RREF）に変形する。

$$\begin{array}{l} ① := ① - 1 \times ② \\ ③ := ③/2 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} ① := ① - 1 \times ③ \\ \longrightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

次に、$LU$ 分解にて REF まで。ガウスの消去法と同じ結果の REF になる。

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = LU = LA_{ref} \end{aligned}$$

**問 4.2（p.116）**　次の行列 $A$ を積の形に $LU$ 分解した後、和の形に分解せよ。

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

**答**　書き込み式にし、途中式だけ示します。やってみてください。

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dots & 1 & 0 \\ \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

答えも書いておきます。

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-b \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b-a & b-a \\ 0 & b-a & b-a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c-b \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

**問 4.3（p.116）**　次の行列を $LU$ 分解しランクを求めなさい。長方行列なので $L$ は正方で可逆、$U$ は $A$ と同じ型。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 8 & 11 \end{bmatrix}$$

**答**

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$L$ は正方で可逆、$U$ の階段数が 3 なのでランクは 3。

# 5　$CR$ 分解と 4 つの部分空間

**問 5.1（p.122）**　次の行列 $A, B$ の $CR$ 分解を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

**答**　2 列目は 1 列目の 2 倍なので、線形独立な列は 1 列目 $(1, 2)$ のみ。これを使って、$A$ の各列を復元する。$R$ の 1 列目は 1、2 列目は 2 とすれば、

$$A = CR$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

となる。蛇足だが、観察すると $C$ は 1 列、$R$ は 1 行で、その積である $A$ はランク 1 行列（図 2.2、p.39）であった。

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

次に、$B$ ついて、列ベクトル $(1, 2)$ の次の $(2, 4)$ は 1 列目の 2 倍なのでパス。$(1, 1)$ が次に線形独立。2 次元なので、2 本で十分。後は全 $B$ の列について、$C$ の列の線形結合となるように $R$ の係数を 1 列目から順に求める。

$$B = CR$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

**問 5.2 (p.128)**　次の行列 $A$ の列空間と行空間を求めよ。また、それぞれの基底と次元を求めよ。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

**答**　$\boldsymbol{v} = (1, 2)$（列ベクトル）とすると、列空間は $\mathbf{C}(A) = \langle \boldsymbol{v}, 2\boldsymbol{v} \rangle$ $(= \langle \boldsymbol{v} \rangle)$。行空間は $\mathbf{C}(A^\mathsf{T}) = \langle \boldsymbol{v}^\mathsf{T}, 2\boldsymbol{v}^\mathsf{T} \rangle$ $(= \langle \boldsymbol{v}^\mathsf{T} \rangle)$。かっこ内でも正解です。行も列も、1 番目が 2 番目がの 2 倍の関係なので、線形独立なベクトルは 1 本のみ。よって、列空間の基底は $\{\boldsymbol{v}\}$、行空間の基底は $\{\boldsymbol{v}^\mathsf{T}\}$ で、次元はともに 1。なお、行空間の基底を $\{\boldsymbol{v}^\mathsf{T}\}$ でなく $\{\boldsymbol{v}\}$ と書いても良い。

**問 5.3（p.136）**　非零ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ によって作られるランク 1 行列 $A = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\mathsf{T}$ を考える。$A$ の 4 つの部分空間を求めなさい。

**答**

- 列空間 $\mathbf{C}(A)$：$\boldsymbol{u}$ のスカラー倍全体（$\mathbf{C}(\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{u} \rangle$）
- 行空間 $\mathbf{C}(A^\mathsf{T})$：$\boldsymbol{v}$ のスカラー倍全体（$\mathbf{C}(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v} \rangle$）

- 零空間 $\mathbf{N}(A)$：$\boldsymbol{v}$ に直交するベクトル全体（$\mathbf{N}(\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{v} \rangle^{\perp}$）
- 左零空間 $\mathbf{N}(A^{\mathsf{T}})$：$\boldsymbol{u}$ に直交するベクトル全体（$\mathbf{N}(\boldsymbol{u}) = \langle \boldsymbol{u} \rangle^{\perp}$）

$A$ のすべての列は、$\boldsymbol{u}$ の $\boldsymbol{v}$ の成分倍であるため、列空間は $\boldsymbol{u}$ のスカラー倍全体（$\mathbf{C}(A) = \langle \boldsymbol{u} \rangle$）になる。また、$A\boldsymbol{x}$ を考えたとき、$\boldsymbol{v}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x} = \alpha$ （内積）とおけば、

$$A\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^{\mathsf{T}})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{v}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{v}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x})\boldsymbol{u} = \alpha \boldsymbol{u} \tag{*1}$$

$\alpha$ が実数なので、列空間は $\boldsymbol{u}$ のスカラー倍全体ということからも分かる。同様にすべての行は $\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{u}$ の成分倍であるため、行空間は $\boldsymbol{v}$ のスカラー倍全体になる（$\mathbf{C}(A^{\mathsf{T}}) = \langle \boldsymbol{v} \rangle$）。

零空間は、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{x}$ の集合であり (*1) より、$\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ なので $\alpha = 0$ すなわち、$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} = 0$ を満たす $\boldsymbol{x}$ の集合 ($\mathbf{N}(A) = \langle \boldsymbol{v} \rangle^{\perp}$) になる。同様に、左零空間は $\boldsymbol{u}$ に直交するベクトル全体 ($\mathbf{N}(A^{\mathsf{T}}) = \langle \boldsymbol{u} \rangle^{\perp}$) になる。

なお、ストラング先生の短いエッセイ「The Four Fundamental Subspaces: 4 Lines」（`https://web.mit.edu/18.06/www/Essays/newpaper_ver3.pdf`）の p.4 に、この問題についての詳しい解説がある。

**問 5.4（p.144）**　$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解がちょうど 2 つ存在する、ということはあるか？

**答**　ない。その 2 つの解 ($\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$) の中点を考えると解になる (計算してみよ)。線形性より $\boldsymbol{x}_1$ と $\boldsymbol{x}_2$ を結ぶ直線上のすべての点が解になるので、2 つ存在すれば無数に存在することになる。

**問 5.5（p.149）**　図 5.7（p.145）の左右それぞれに、行空間を書き入れるとすると、どのようになるか。また、行空間解 $\boldsymbol{x}_r$ はどこに描かれるか。列空間はどうか。

**答**　行空間は零空間の直交補空間であることを思い出す。答えは図 5.7（p.145）の左図では、$O$ を通って $\mathbf{N}(A)$ に直行する平面、右図では $\mathbf{N}(A)$ に直交する直線となる。$\boldsymbol{x}_r$ はその行空間と解の存在領域（$\boldsymbol{x}_p + \mathbf{N}(A)$）の交点。$\boldsymbol{x}$ から行空間に向けて垂線を下ろし、その足を求めることになる（直交射影）。また、列空間はこの絵に存在しない（出力側 $\mathbb{R}^m$）。

**問 5.6（p.150）**　例題 5.3（p.139）の行列 $A$ について、左零空間（図 5.6 ⑪、p.135）の基底 $\boldsymbol{t} = (1, -2, 1)$ を使って、$\boldsymbol{b}_1 = (0, 3, 6), \boldsymbol{b}_2 = (0, 1, 3)$ が列空間に属するかどうかを検査せよ。

**答**　定理 5.17（p.150）より、

$$\boldsymbol{t}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 0, \quad \boldsymbol{t}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = 1$$

よって、$\boldsymbol{b}_1$ は列空間に属するが、$\boldsymbol{b}_2$ は属さない。

# 6　$QR$ 分解と射影

**問 6.1（p.164）**　次の行列 $Q$ について、列正規直交行列であることを確認し、$Q^{\mathsf{T}}Q$ と $QQ^{\mathsf{T}}$ を計算しなさい。

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

**答**　まず、各列のノルムが 1 で、互いに直交していることを確認すればよい。次に、$Q^{\mathsf{T}}Q$ と $QQ^{\mathsf{T}}$ を計算する。

$$Q^{\mathsf{T}}Q = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

$$QQ^{\mathsf{T}} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

それぞれの結果の行列が違う型になることに注意（$3 \times 3$ と $2 \times 2$）。また、普通 $QQ^{\mathsf{T}}$ の方は単位行列とは**全く違った行列**になる。さらに、この行列は射影行列（定義 6.6、p.176）であることにも注意。すなわち、$(QQ^{\mathsf{T}})^2 = QQ^{\mathsf{T}}$ かつ $(QQ^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = QQ^{\mathsf{T}}$ が成り立つ。

**問 6.2（p.173）**　$(-1, -1, 1) \in \mathbf{N}(A)$ と行空間への射影行列 $P$ の 3 本の各列ベクトルとの内積を計算してみよ。何が起こるか？これは何を意味するのか？

**答**

$$P = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

各列との内積は、$P^{\mathsf{T}} = P$ なので、

$$P^{\mathsf{T}}\boldsymbol{s} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2+1+1 \\ 1-2+1 \\ -1-1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

すべて 0 になる。$P$ は行空間への射影なので、その列ベクトルはすべて行空間に属する。行空間と零空間は直交しているので、この結果になる。

# 7　固有値分解 $X\Lambda X^{-1}$

**問 7.1（p.193）**　次の行列式を求めよ。

$$① \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad ② \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} \qquad ③ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

ヒント：①三角行列（性質 7.3、p.191 ）、②1 列目と 2 列目の関係（性質 7.4(3) か (4)、p.192)、③サラスの方法（図 7.1 右、p.187）を使う。

**答**　① $1 \times 3 \times 6 = 18$、　② 0、　③ $0 + 40 + 0 - 15 - 24 - 0 = 1$

**問 7.2（p.194）**　問 7.1（p.193）の①の行列式を 1 行目に関する余因子展開で計算せよ。③の行列式を 1 列目に関する余因子展開で計算せよ。

**答**　①については、余因子展開を再帰的に 2 回使った。

$$① \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = (1)(3)\begin{vmatrix} 6 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 18$$

$$③ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} + (5)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (1)(-24) - 0 + (5)(5) = 1$$

**問 7.3（p.194）**　性質 7.6 を $3 \times 3$ 行列で証明せよ。

**答**　示すべき性質は、

**性質 7.6（p.194）**　$n$ 次正方行列 $A$ が可逆であるとき、その逆行列 $A^{-1}$ は余因子行列 $\tilde{A}$ を使って次のように表される。

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = \det(A)I \quad \text{すなわち、} \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}$$

*Proof.* $\tilde{A}A = \det(A)I$ を示せばよい。$\tilde{A}$ を行に、を $A$ 列に分解して掛け算すると、

$$\begin{aligned}
\tilde{A}A &= \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^* \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_2^* \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_3^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{a}}_1^*\boldsymbol{a}_1 & \tilde{\boldsymbol{a}}_1^*\boldsymbol{a}_2 & \tilde{\boldsymbol{a}}_1^*\boldsymbol{a}_3 \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_2^*\boldsymbol{a}_1 & \tilde{\boldsymbol{a}}_2^*\boldsymbol{a}_2 & \tilde{\boldsymbol{a}}_2^*\boldsymbol{a}_3 \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_3^*\boldsymbol{a}_1 & \tilde{\boldsymbol{a}}_3^*\boldsymbol{a}_2 & \tilde{\boldsymbol{a}}_3^*\boldsymbol{a}_3 \end{bmatrix} \quad \text{定義 7.2（p.193）の式より、} \\
&= \begin{bmatrix} |\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3| & |\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3| & |\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3| \\ |\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_3| & |\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3| & |\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_3| \\ |\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1| & |\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2| & |\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = \det(A)I
\end{aligned}$$

□

**解説**　ここまででパッと分かれば素晴らしい計算力です！念のため、1 ステップごとに噛み砕いた説明も追加しましょう。

(1, 1) 成分を考えます。余因子行列 $\tilde{A}$ の 1 行目が $\tilde{\boldsymbol{a}}_1^*$ なので転置に注意して、

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_1^* = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

です。この式を使って、$\tilde{\boldsymbol{a}}_1^* \boldsymbol{a}_1$ が行列式 $|A|$ になることを示します。以下の計算は、行列式 $|A|$ の 1 列目についての余因子展開そのものです。

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{a}}_1^* \boldsymbol{a}_1 &= a_{11}\,\tilde{a}_{11} + a_{21}\,\tilde{a}_{12} + a_{31}\,\tilde{a}_{13} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{a}_3| = |A|\end{aligned}$$

これは、他の対角成分についても同様に示せます。例えば、$(2,2)$ 成分を考えると、行列式の余因子展開を 2 列目について行ったのと同じ式になります（○が 2 列目を動く）。すなわち、任意の $i$ について、$\tilde{\boldsymbol{a}}_i^* \boldsymbol{a}_i$ は、$i$ 列目の余因子展開となり $A$ の行列式になります (*1)。

次に非対角成分を考えると、例えば、$(1,2)$ 成分は $\tilde{\boldsymbol{a}}_1^* \boldsymbol{a}_2$ ですが、これは、対角成分 $\tilde{\boldsymbol{a}}_1^* \boldsymbol{a}_1$ の $\boldsymbol{a}_1$ を $\boldsymbol{a}_2$ に置き換えたものになります。つまり、$A$ の 1 列目を 2 列目に置き換えて（1 列目と 2 列目は同じになる）、余因子展開したのと同じなのです。

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_1^* \boldsymbol{a}_2 = a_{12}\,\tilde{a}_{11} + a_{22}\,\tilde{a}_{12} + a_{32}\,\tilde{a}_{13} = |\boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{a}_3| = 0$$

すなわち任意の $i, j (i \neq j)$ について、$\tilde{\boldsymbol{a}}_i^* \boldsymbol{a}_j$ は「$|A|$ の $i$ 列目を $j$ 列目に置き換えた行列式」となり、同じ 2 つの列を持つ行列式は、性質 7.4（p.192）により 0 になります (*2)。

(*1),(*2) より、$\tilde{\boldsymbol{a}}_i^* \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij}|A|$（$\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタ）であることが示され、これを $A$ の次数 $n$ として $n \times n$ の行列として縦横に並べれば、$\tilde{A}A = \det(A)I$ となると言う訳です。

## 問 7.4（p.196）　上記の行列式と可逆性（性質 7.8）を証明せよ。

**答**　証明すべき性質は以下。

> **性質 7.8（p.195）**　正方行列 $A$ について、その行列式が非零であることと、可逆であること（$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が自明解のみを持つこと）は同値。
>
> $$\det(A) \neq 0 \iff A \text{ は可逆 } (\iff A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ の解は } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ のみ})$$
>
> 対偶を取って、行列式が 0 であることと、不可逆であること（$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が非自明解を持つこと）は同値。
>
> $$\det(A) = 0 \iff A \text{ は不可逆 } (\iff A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ は解 } \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0} \text{ を持つ})$$

最初の命題、「$\det(A) \neq 0 \iff (A$ は可逆 $\iff A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみ$)$」を証明する。カッコ内にある、可逆性と $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の自明解の関係については、定理 3.13（p.82）によってすでに示されているので、「$\det(A) \neq 0$ と可逆性」もしくは「$\det(A) \neq 0$ と $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$」の同値関係について証明すればよい。

*Proof.*　($\det(A) \neq 0 \iff$ でなく $\Longleftarrow$ $A$ は可逆)：$A$ が可逆ならば、$A^{-1}$ が存在し、$AA^{-1} = I$ である。性質 7.7（p.195）より、$1 = \det(I) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$ あるから、$\det(A) \neq 0$。

($\det(A) \neq 0 \Longrightarrow A$ は可逆)：対偶を示す。$A$ が不可逆を仮定すると、$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は非自明解 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ を持つ。この式 $x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$ の非自明解の存在は、$A$ の列ベクトルが線形従属であることを示すので、性質 7.4（p.192）より $\det(A) = 0$ である。 □

**問 7.5（p.203）**　$n$ 個の異なる固有値を持つ $n$ 次正方行列 $A$ は、必ず対角化可能であることを示せ。

**答**　異なる 2 つの固有値に対応する固有ベクトルは、線形独立であることをまず示してみる。仮に一方が他方のスカラー倍で表されるとすると、部分空間が積について閉じているので、両方の固有空間に属する固有ベクトルが存在することになる。$W(\lambda_1) \cap W(\lambda_2) \ni \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ とすると、$A\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{x}$ と $A\boldsymbol{x} = \lambda_2 \boldsymbol{x}$ を引き算して、

$$\mathbf{0} = (\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x}$$

となり、$\lambda_1 \neq \lambda_2$ より $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ となってしまう。よって、異なる固有値に対応する固有ベクトルは線形独立である。これで、$n$ 個の固有ベクトルの**どのペアも、線形独立**であることが示される。しかし、これだけでは $n$ 本の固有ベクトルが線形独立であることは示されていない！ $n$ 本の関係性について調べる必要があるのだ。正式な証明は、以下のようになる。

*Proof.* $n$ 次正方行列 $A$ の異なる固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とし、それぞれに対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ とする。$n = 1$ の場合、一本の非零ベクトルは線形独立である。$n = 2$ の場合、

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0} \tag{*1}$$

を仮定する。(*1) の両辺に $A$ をかけて、

$$\alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \boldsymbol{x}_2 = \mathbf{0} \tag{*2}$$

を得る。今度は (*1) の両編に $\lambda_2$ をかけて (*2) を引き算すると、$\boldsymbol{x}_2$ の項が消えて、

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x}_1 = \mathbf{0}$$

となり、$\lambda_1 \neq \lambda_2$ なので、$\alpha_1 = 0$。これを (*1) に代入して、$\alpha_2 = 0$。よって、$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ がいえて、$n = 2$ の場合 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は線形独立である。

この変形を観察すると、(*1) に対して $A - \lambda_2 I$ をかけると、$\boldsymbol{x}_2$ が消えることを利用している。

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2) &= \mathbf{0} \\ \alpha_1 \underbrace{(A - \lambda_2 I)\boldsymbol{x}_1}_{=(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x}_1} + \alpha_2 \underbrace{(A - \lambda_2 I)\boldsymbol{x}_2}_{=\mathbf{0}} &= \mathbf{0} \\ \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)\boldsymbol{x}_1 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

すなわち、$\boldsymbol{x}_2 \in W(\lambda_2) = \mathbf{N}(A - \lambda_2 I)$ なのである。この調子で、

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{x}_3 = \mathbf{0}$$

を仮定して、$(A - \lambda_3 I)$ をかけると、$\boldsymbol{x}_3$ の項が消え、次に $(A - \lambda_2 I)$ をかけると、$\boldsymbol{x}_2$ の項が消える。残ったのは、

$$\begin{aligned} \alpha_1(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I)\boldsymbol{x}_1 &= \mathbf{0} \\ \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\boldsymbol{x}_1 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

となり、$\alpha_1 = 0$ がいえ、これをもとの式に代入して、$\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0$ が順にいえる。$n$ 本の固有ベクトルについても、

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n = \mathbf{0}$$

を仮定して、$(A-\lambda_n I)$ をかけると、$\boldsymbol{x}_n$ の項が消え、次に $(A-\lambda_{n-1}I)$ をかけると、$\boldsymbol{x}_{n-1}$ の項が消える。これを繰り返すと、最終的に、

$$\alpha_1(A-\lambda_2 I)(A-\lambda_3 I)\cdots(A-\lambda_n I)\boldsymbol{x}_1=\mathbf{0}$$
$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots(\lambda_1-\lambda_n)\boldsymbol{x}_1=\mathbf{0}$$

となり、各固有値が異なることから $\alpha_1=0$ がいえ、順に $\alpha_2=\alpha_3=\cdots=\alpha_n=0$ がいえる。よって、$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ は線形独立であることが示された。 □

> **問 7.6（p.203）**　行列 $A$ が対角化可能であることと、可逆であることには必要条件・十分条件の関係はない。$2\times 2$ 行列で、対角化可能だが可逆でないもの、可逆だが対角化可能でないものをそれぞれ一つずつ挙げよ。

**答**　対角化可能だが可逆でない例：

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \phi_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-1)$$

固有値は $\lambda_1=0,\lambda_2=1$ で、二つの異なる固有値をもつので対角化可能。しかし、$\det(A)=0$ もしくは $\operatorname{rank}A=1<2$ より不可逆。

可逆だが対角化可能でない例：

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix},\quad \phi_A(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2$$

固有値は $\lambda=1$ のみで、重複度 2。

$$(A-I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$
$$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

を解くと、$x_2=0$ より固有ベクトルは $(1,0)$ のみで、次元は 1。よって、線形独立な固有ベクトルは 1 本しか取れず、対角化可能でない。一方で、$\det A=1\neq 0$ もしくは $\operatorname{rank}A=2$ より可逆。

なお、固有値の多重度が 2 でも、その固有値に対応する固有ベクトルが 2 本取れれば対角化可能となる。例は、$A=I$ の場合で、固有値は $\lambda=1$ のみで多重度 2 だが、

$$(A-I)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$$
$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

の解は何でもよく、適当に 2 つの線形独立なベクトルを取ればよい。最も単純に取れば、$(1,0),(0,1)$ で、次元は 2。よって、線形独立な固有ベクトルは 2 本取れ、対角化可能である。

> **問 7.6（p.205）**　行列 $A$ の指数関数 $e^A$ は、以下のテイラー展開で定義される。
>
> $$e^A=I+A+\frac{1}{2!}A^2+\frac{1}{3!}A^3+\cdots \tag{2}$$
>
> 正方行列 $A$ について、$\det(e^A)=e^{\operatorname{tr}(A)}$ であることを、$A$ が対角化可能な場合について示せ（実際はどんな正方行列についても成り立つ）。

**ヒント** 固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とし、定理 7.4（p.204）を使う。

**答**

*Proof.* 対角行列の累乗 $\Lambda^n$ は容易に計算できて、

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \implies \Lambda^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

これを使って、$e^\Lambda$ を計算すると、

$$e^\Lambda = \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 + \frac{1}{2!}\lambda_1^2 + \cdots & & \\ & \ddots & \\ & & 1 + \lambda_n + \frac{1}{2!}\lambda_n^2 + \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

が得られる。定理 7.4（p.204）より、この行列式は容易に計算できる。

$$\det(e^\Lambda) = e^{\lambda_1} \cdots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n} = e^{\mathrm{tr}(\Lambda)}$$

これで、$A$ が対角行列 $A = \Lambda$ の場合は証明できた。$A$ が対角化可能であれば、$A = X\Lambda X^{-1}$ と書けるので、再度、$e^A$ の展開式で計算する。

$$\begin{aligned} e^A &= e^{X\Lambda X^{-1}} \\ &= I + X\Lambda X^{-1} + \frac{1}{2!}(X\Lambda X^{-1})^2 + \frac{1}{3!}(X\Lambda X^{-1})^3 + \cdots \\ &= X(I + \Lambda + \frac{1}{2!}\Lambda^2 + \frac{1}{3!}\Lambda^3 + \cdots)X^{-1} \\ &= Xe^\Lambda X^{-1} \end{aligned}$$

よって、性質 7.7（p.195）より、

$$\det(e^A) = \det(Xe^\Lambda X^{-1}) = \det(e^\Lambda) = e^{\mathrm{tr}(A)}$$

である。$A$ が対角化不能の場合も、$A$ を三角化できる（後述のシュアの定理 7.8、p.210）ので、三角化行列の性質 2.2（p.61）から同様に示せる。 □

**問 7.9（p.211）** 実数成分の交代行列 $A$（$A^\mathsf{T} = -A$：定義 2.2、p.59）の固有値はすべて純虚数（実数部が 0 の複素数）であることを示せ。
**ヒント** 実対称行列の場合（▶ 補遺）と同様。

**答**

*Proof.* 固有値 $\lambda$ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ とする。$A\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{x}$ の内積を 2 通り考える。

$$(A\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{x}) = (\lambda\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})$$
$$(\boldsymbol{x}) \cdot (-A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}) \cdot (-\lambda\boldsymbol{x}) = -\overline{\lambda}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})$$

この 2 つの式は交代行列の性質 $A^* = -A$ と式 (7.8)（p.210）より等しいので、

$$\lambda(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) = -\overline{\lambda}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) \implies (\lambda + \overline{\lambda})(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) = 0$$

$\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ より、$(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}) \neq 0$ である。したがって、$\lambda = -\overline{\lambda}$ となり、$\lambda$ は純虚数である。 □

**問 7.10（p.213）**　スペクトル分解（和の形）された各行列 $Q_i = \boldsymbol{q}_i\boldsymbol{q}_i^\top$ が、射影行列であることを 2 つの方法で示せ。(1)（定義 6.6、p.176）。(2)（定理 6.2、p.158）。

**答**　(1) $Q_i = \boldsymbol{q}_i\boldsymbol{q}_i^\top$ は $Q_i^2 = Q_i$（冪等性）,$Q_i^\top = Q_i$（対称性）を満たす。

$$
\begin{aligned}
Q_i^2 &= (\boldsymbol{q}_i\boldsymbol{q}_i^\top)(\boldsymbol{q}_i\boldsymbol{q}_i^\top) = \boldsymbol{q}_i(\boldsymbol{q}_i^\top\boldsymbol{q}_i)\boldsymbol{q}_i^\top = \boldsymbol{q}_i(1)\boldsymbol{q}_i^\top = Q_i \\
Q_i^\top &= (\boldsymbol{q}_i\boldsymbol{q}_i^\top)^\top = \boldsymbol{q}_i\boldsymbol{q}_i^\top = Q_i
\end{aligned}
$$

(2) 定理 6.2（p.158）の記号で $Q_i$ を $\boldsymbol{q}_i\boldsymbol{q}_i^\top$ とできる。すなわち、和分解された各行列 $Q_i = \boldsymbol{q}_i\boldsymbol{q}_i^\top$ は、固有空間 $\langle \boldsymbol{q}_i \rangle$ への射影行列である。

**問 7.11（p.214）**　$A \sim B$ かつ $B \sim C$ ならば、$A \sim C$ が成り立つことを示せ。

**答**

*Proof.* $B = X^{-1}AX,\ C = Y^{-1}BY$ とすると、

$$C = Y^{-1}(X^{-1}AX)Y = (YX)^{-1}A(YX)$$

となる。$YX$ は可逆なので、$A \sim C$ が成り立つ。 □

**解説** ここで、$A$ の左と右からそれぞれ可逆行列 $X^{-1}, X$ を掛ける（$X$ を「ひねって掛ける」などという）ことが、この推移律に効いています。例えば、$A \mapsto XAX$ という変換の場合には、

$$C = Y(XAX)Y = (YX)A(XY)$$

となり、$YX = XY$ でない限り、推移律は成り立たないのです。

**問 7.12（p.214）**　相似変換は、トレースと行列式を不変に保つことを示せ。

**答**

*Proof.* $B = X^{-1}AX$ とすると、

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(B) &= \operatorname{tr}(X^{-1}AX) = \operatorname{tr}(AXX^{-1}) = \operatorname{tr}(A) \quad \text{（性質 1.7、p.34）} \\
\det(B) &= \det(X^{-1}AX) = \det(X^{-1})\det(A)\det(X) = \det(A) \quad \text{（性質 7.7、p.195）}
\end{aligned}
$$

□

さらにいえば、相似変換によって固有方程式が不変です。固有ベクトルは変わりますが、固有値は変わりません。

**問 7.13（p.215）**　固有多項式が一致しても、相似でない 2 つの $2 \times 2$ 正方行列の例を示せ。

**答**　$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$　と　$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

**問 7.14（p.217）**　$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ でケイリー・ハミルトンの定理を確かめよ。

**答**　固有多項式は、$\phi_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^2 - 4\lambda + 1$ である。

$$\phi_A(A) = A^2 - 4A + I = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & -4 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

**問 7.15（p.218）**　$A, B$ が正定値のとき、$A+B$ が正定値であることを示せ。
**ヒント** $\boldsymbol{x}^\mathsf{T}(A+B)\boldsymbol{x}$ を考えればよい。

**答**

*Proof.* 任意の非零ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して、

$$\boldsymbol{x}^\mathsf{T}(A+B)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\mathsf{T}A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^\mathsf{T}B\boldsymbol{x} > 0$$

が成り立つので、$A+B$ は正定値である。 □

**問 7.16（p.218）**　$n$ 次半正定値行列 $S$ に対して、$n$ 次元単位ベクトル $\boldsymbol{x}$ であって、$\boldsymbol{x}^\mathsf{T}S\boldsymbol{x}$ が最大、最小となるものは、それぞれ、$S$ の最大固有値および最小固有値に対応する単位固有ベクトルであることを示せ（この性質は第 8 章の特異値分解で利用するので理解しておくこと。詳しくは（▶ 解説付き問題集）にて解説。

**答**

*Proof.* 半正定値行列は必ずスペクトル分解 $S = Q\Lambda Q^\mathsf{T}$ が可能で、そのとき $\Lambda$ の対角成分 $\lambda_i$ はすべて非負となる。固有値を、$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$ と降順に並べて添字付けする。このとき、$\boldsymbol{x}^\mathsf{T}S\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\Lambda\boldsymbol{y}$（$\boldsymbol{y} = Q^\mathsf{T}\boldsymbol{x}$）と変数を変換する。直交行列 $Q$ は可逆なので、$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ はこの変換によって 1 対 1 対応し、$\|\boldsymbol{x}\| = 1 \iff \|\boldsymbol{y}\| = \sum_i y_i^2 = 1$。よって、$\boldsymbol{y}^\mathsf{T}\Lambda\boldsymbol{y} = \sum_i \lambda_i y_i^2$ の最大・最小値を考えればよい。ここで、$\sum_i y_i^2 = 1, y_i^2 \geq 0$ であるから、固定された非負の $\lambda_i$ に対して $y_i^2$ を非負の重みと見なせば、$\sum_i \lambda_i y_i^2$ は最大の $\lambda_1$ と最小の $\lambda_n$ に重みを集中させることで、全体の最大値と最小値が求まる。すなわち、$\boldsymbol{y}$ として標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_n$ を選ぶことで、最大値 $\lambda_1$、最小値 $\lambda_n$ を得る。もとの変数 $\boldsymbol{x} = Q\boldsymbol{y}$ に戻すと、最大値・最小値に対応するのは、$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}_n$ すなわち、最大・最小の固有値に対応する固有ベクトルである。 □

なお、この問題は、レイリー商（Rayleigh quotient）と呼ばれる量の最大・最小を求める問題としてよく知られています。

$$\text{レイリー商：}\quad R_S(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x}^\mathsf{T}S\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}}$$

# 8　特異値分解 $U\Sigma V^T$

**問 8.1（p.237）**　非零ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ によって作られるランク 1 行列 $A = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top$ の特異値分解を求めよ。コンパクト版で表せ。

**答**　ランク 1 行列 $A = \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^\top$ に対して、列空間は $\langle \boldsymbol{u} \rangle$、行空間は $\langle \boldsymbol{v} \rangle$ である。正規化して、倍率を $\Sigma$ に集めれば、

$$A = U\Sigma V^\top = (\boldsymbol{u}/\|\boldsymbol{u}\|)(\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|)(\boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|)^\top$$

と表せる。

**問 8.2（p.242）**　(1)$A$ が可逆な正方行列の場合、擬似逆行列 $A^+$ は通常の逆行列 $A^{-1}$ に一致することを示せ。(2)$\boldsymbol{y}$ が $A$ の左零空間 $\mathbf{N}(A^\top)$ に属する場合、すなわち $\boldsymbol{y} \in \mathbf{N}(A^\top)$ について $A^+\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ であることを示せ。(3) 任意の $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ について、$A^+\boldsymbol{y}$ は必ず $A$ の行空間 $\mathbf{C}(A^\top)$ に属することを示せ。

**答**　ここでの証明には、すべて特異値分解（コンパクト版）を使う。

*Proof.* (1)$A$ が可逆な正方行列の場合、$\operatorname{rank} A = n = m$ である。特異値分解は $A = U\Sigma V^\top$ と表され、$\Sigma$ は対角成分が非零の $n \times n$ の可逆正方行列（定理 8.1、p.232）よって、$\Sigma^+$ の対角成分は、すべて $\Sigma$ の対角成分の逆数（$\sigma_i^{-1}$）であり、$\Sigma^+ = \Sigma^{-1}$ となる。すなわち、

$$A^+ = V\Sigma^+U^\top = V\Sigma^{-1}U^\top$$

であり、$A$ との積を両側で計算すると、

$$AA^+ = (U\Sigma V^\top)(V\Sigma^{-1}U^\top) = U\Sigma\Sigma^{-1}U^\top = UIU^\top = I$$
$$A^+A = (V\Sigma^{-1}U^\top)(U\Sigma V^\top) = V\Sigma^{-1}\Sigma V^\top = VIV^\top = I$$

となり、$A^+ = A^{-1}$ が示された。

(2)$\boldsymbol{y}$ が $A$ の左零空間 $\mathbf{N}(A^\top)$ に属する場合、$\boldsymbol{y}$ は $A$ の列空間 $\mathbf{C}(A)$ と直交する。$U$ の列ベクトルは $\mathbf{C}(A)$ の正規直交基底であるため、$U^\top\boldsymbol{y}$ の各成分（$U$ の列ベクトルと $\boldsymbol{y}$ の内積）はすべて 0 である。よって、

$$A^+\boldsymbol{y} = (V\Sigma^+U^\top)\boldsymbol{y} = V\Sigma^+(U^\top\boldsymbol{y}) = V\Sigma^+\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

最後に、(3) 任意の $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ に対して $A^+\boldsymbol{y}$ が $A$ の行空間 $\mathbf{C}(A^\top)$ に属することを示す。$V$ の列ベクトルはすべて $A$ の行空間の基底であるため、

$$A^+\boldsymbol{y} = V\Sigma^+U^\top\boldsymbol{y} = V(\Sigma^+U^\top\boldsymbol{y})$$

は $V$ の列ベクトルの線形結合であるから、必ず $A$ の行空間に属する。 □

# A　付録

**問 A.1（p.257）**　多項式の微分は、ベクトル空間 $\mathbb{R}_{\leq n}[x] \mapsto \mathbb{R}_{\leq n}[x]$ の線形変換であることを確認し、上記基底を取ったときの表現行列（定義 3.13、p.88）を求めよ。

**答**　微分すると次数が 1 つ下がるので、$\mathbb{R}_{\leq n}[x] \to \mathbb{R}_{\leq n-1}[x]$ の線形変換とも考えられるが、ここでは定義域も終域も $\mathbb{R}_{\leq n}[x]$ としている。

*Proof.* 多項式

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

の微分を $p'(x) = p(x)'$ と書くと、

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1}$$

であり、

$$(p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x)$$
$$(\alpha p(x))' = \alpha p'(x)$$

となることからこの変換は線形である。基底 $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ の各要素の微分は、

$$(1)' = 0, \quad (x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2, \quad \ldots, \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

となる。微分の線形性から、微分という変換 $\mathbb{R}_{\leq n}[x] \to \mathbb{R}_{\leq n}[x],\ p(x) \mapsto p'(x)$ は、表現行列を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

として、

$$\begin{bmatrix} (1)' & (x)' & (x^2)' & \cdots & (x^n)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{bmatrix} A$$

と書ける。 □

多項式がベクトル空間をなすこと、そして、微分という変換が線形変換であることも確認できました。これは、線形代数がさまざまな空間や変換を扱えることの一例です。

## 表紙の問題解答

本ドキュメントの表紙にはモンドリアン風のデザインが描かれていますが、もしこのページから全ての文字を取り去ったとして、1 つの行列と見立てます。色は別の数字とします。この行列のランクを求めて下さい。

いくつかの解答が考えられます。

#### 解答例 1: ガウスの消去法

ガウスの消去法を使います。最上部の灰色四角形にまず注目してください。この灰色部分が 2 行分あるとします（何行でも構いません)。1 行目（灰色が少し入っている帯）を 2 行目（1 行目と同じ帯）から引き算すると、2 行目を 0 にできます。灰色の行はすべて 1 行目と同じなので、同様にしてすべての灰色の行を 0 にできます。次に、灰色の下に赤色があります。赤色の行はすべて同じなので、赤色の 1 行目をその下の行たちから引き算して、赤色の行を 0 にできます。この操作を同様に続けると、青も黄色も 1 行を残して 0 にできます。最下部の赤ですが、これは青の行のスカラー倍になります。行基本変形でこれ以上の行は消せません。したがって、ランクは残った階段数=4 です。

#### 解答例 2: 行優先の $CR$ 分解

本文では、列に対して $CR$ 分解を行う方法を説明しています。線形独立な列を選び、残りの列を線形結合で表す方法です。ここでは、行に対して同様の方法を使います。本文の図 2.13（p.50）の要領です。すると、線形独立な行は 4 行、残りの行はそれらの線形結合で表せます。線形結合と言っても実際には上の行の 1 倍、最後の赤だけ、これは青の行のスカラー倍（$c =$ ■/■）になります。ランクは線形独立な行の本数=4 です。右辺の右の行列に行空間の基底が、左の行列には 1 と 0 が並びます。1 が並ぶ部分は、同じ色の区画を引き延ばす役割で、c が並ぶ部分は、青を赤に変えて引き伸ばしています。ちょうど機械学習でのデコーダのように、もとの次元に戻す操作を担当しています。

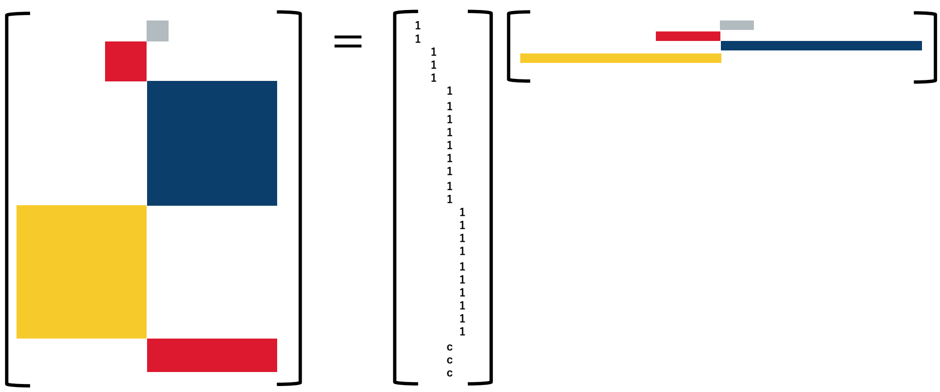

図 2: 行優先の $CR$ 分解

上の式は、$A^\mathsf{T}$ に対して通常の $CR$ 分解を行ったという解釈もできます。

#### 解答例 3: $CR$ 分解

ここで、本文で詳説した $CR$ 分解をそのまま行います。実は、この行列は列方向に見ると複数の色が混じって少し複雑です。その理由でこの解法を最後に紹介しています。線形独立な列を選び、残り

の列をそれらの線形結合で表します。本文の図 5.1（p.120）の要領です。少々見にくいですが、線形独立な列は 4 本、残りの列はそれらの線形結合で表せます。線形結合と言っても実際には上の列の 1 倍です。ランクは線形独立な列の本数=4 です。

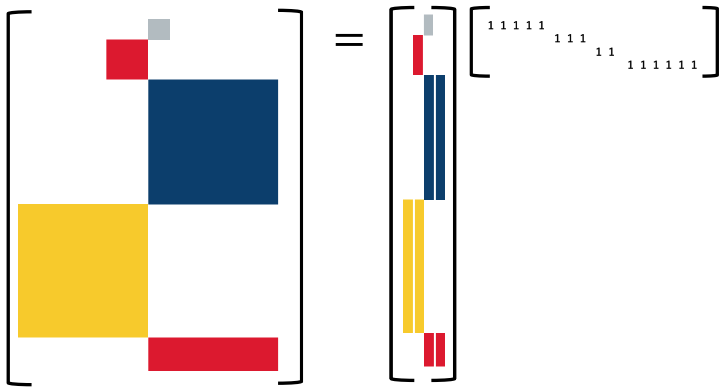


図 3: 列優先の $CR$ 分解

同様に、国旗をモチーフにして、さまざまな国の国旗のランクを求めるという話題が Prof. Alex Townsend のゲスト講義として Prof. Strang 先生の授業で紹介されています。詳しくはこちらをどうぞ。`https://anagileway.com/2026/04/03/rank-of-flag-matrix/`

最後に、いくつかの国旗のランクを示して、問題集を閉じます。

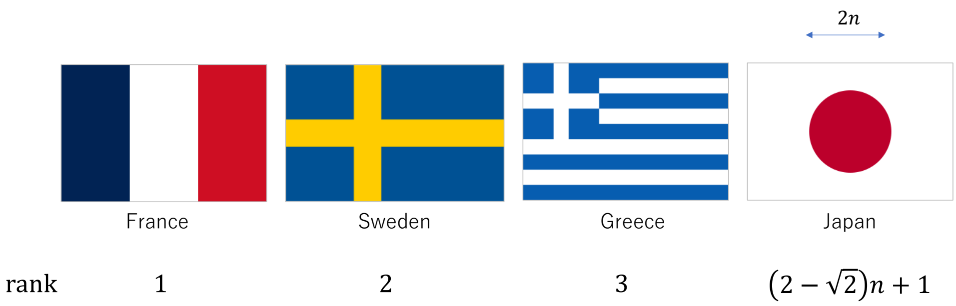


図 4: 各国の国旗のランク