『金融実務講座 マルチンゲールアプローチ入門』追加解説２

村上秀記 著

2017年4月1日

ｐ１５７の（６）式の導出がよくわからないというコメントを複数いただきました。コメントの多くは、期待値を積分に落として解く事はできるが、第１章で述べられているようなマルチンゲールアプローチで解くにはどのようにすればいいのか？というものです。実はこれをマルチンゲールアプローチで解くには、ギルザノフの定理に絡んだ、ある“気づき”が必要になります。これはギルザノフの定理のいわば“もう一つの使い方”を教えてくれます（←この使い方は第２章ｐ９５で、エクスチェンジ・オプションの解析解の導出の過程で解説・使用されており、実はその後も、特にバリアーオプションの所で、何度も用いられています)。これによって、ギルザノフの定理がよりよく理解できるようになると思います（最後のコメントも参照)。

$$C^{Caplet}(0)=\Delta\times P(0,T+\Delta)\times E^{Q_{T+\Delta}}\left[\left(L(0,T,T+\Delta)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2T+\sigma W^{Q_{T+\Delta}}(T)}-K\right)^+\right]$$

$$=\Delta\times P(0,T+\Delta)\times E^{Q_{T+\Delta}}\left[\left(L(0,T,T+\Delta)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2T+\sigma W^{Q_{T+\Delta}}(T)}-K\right)1\{L(0,T,T+\Delta)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2T+\sigma W^{Q_{T+\Delta}}(T)}\geq K\}\right]$$

（指標関数を使って表現）

$$=\Delta\times P(0,T+\Delta)\times L(0,T,T+\Delta)E^{Q_{T+\Delta}}\left[e^{-\frac{1}{2}\sigma^2T+\sigma W^{Q_{T+\Delta}}(T)}1\{L(0,T,T+\Delta)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2T+\sigma W^{Q_{T+\Delta}}(T)}\geq K\}\right]$$
$$-\Delta\times P(0,T+\Delta)\times K\times E^{Q_{T+\Delta}}\left[1\{L(0,T,T+\Delta)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2T+\sigma W^{Q_{T+\Delta}}(T)}\geq K\}\right]$$

（期待値の線形性）

以下、前半部分と後半部分に分けて解く。

$$\text{後半部分}=-\Delta\times P(0,T+\Delta)\times K\times E^{Q_{T+\Delta}}\left[1\{L(0,T,T+\Delta)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2T-\sigma\sqrt{T}X}\geq K\}\right]$$

ただし、$Q_{T+\Delta}$ の下で $X\sim N(0,1)$

$$=-\Delta\times P(0,T+\Delta)\times K\times E^{Q_{T+\Delta}}\left[1\left\{X\leq\frac{\ln L(0,T,T+\Delta)/K-\frac{1}{2}\sigma^2T}{\sigma\sqrt{T}}\right\}\right]$$

$$=-\Delta\times P(0,T+\Delta)\times K\times N(\mathrm{d}2)$$

ただし、$\mathrm{d}2=\dfrac{\ln(L(0,T,T+\Delta)/K)-\frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}}$

次に前半部分の計算を行うが、ここで、冒頭で述べた“気づき”が必要になる。それは期待値の中身の$e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T+\sigma W^{Q_{T+\Delta}}(T)}$の部分が、ラドンニコディム微分の形をしているという事実である。ギルザノフの定理（ｐ３９）を再度見て欲しい。するとこれがｐ３９の（２５）式において$\theta(t)=-\sigma$としたものになっている事がわかる。従って、これによって作られる新しい確率を$\tilde{Q}_{T+\Delta}$とすると、

$$\frac{d\tilde{Q}_{T+\Delta}}{dQ_{T+\Delta}}=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T+\sigma W^{Q_{T+\Delta}}(T)}$$

であり、ギルザノフの定理より$W^{\tilde{Q}_{T+\Delta}}(T):=W^{Q_{T+\Delta}}(T)-\sigma T$は確率$\tilde{Q}_{T+\Delta}$の下で標準ブラウン運動になる。以下、これを用いて前半部分の計算を行う。

前半部分

$$=\Delta\times P(0,T+\Delta)\times L(0,T,T+\Delta)E^{Q_{T+\Delta}}\left[e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T+\sigma W^{Q_{T+\Delta}}(T)}1\{L(0,T,T+\Delta)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T+\sigma W^{Q_{T+\Delta}}(T)}\geq K\}\right]$$

$$=\Delta\times P(0,T+\Delta)\times L(0,T,T+\Delta)E^{Q_{T+\Delta}}\left[\frac{d\tilde{Q}_{T+\Delta}}{dQ_{T+\Delta}}1\{L(0,T,T+\Delta)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T+\sigma W^{Q_{T+\Delta}}(T)}\geq K\}\right]$$

$$=\Delta\times P(0,T+\Delta)\times L(0,T,T+\Delta)E^{\tilde{Q}_{T+\Delta}}\left[1\{L(0,T,T+\Delta)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T+\sigma W^{Q_{T+\Delta}}(T)}\geq K\}\right]$$

$$=\Delta\times P(0,T+\Delta)\times L(0,T,T+\Delta)E^{\tilde{Q}_{T+\Delta}}\left[1\{L(0,T,T+\Delta)e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 T+\sigma(W^{\tilde{Q}_{T+\Delta}}(T)+\sigma T)}\geq K\}\right]$$

（$W^{\tilde{Q}_{T+\Delta}}(T):=W^{Q_{T+\Delta}}(T)-\sigma T$より、$W^{Q_{T+\Delta}}(T)=W^{\tilde{Q}_{T+\Delta}}(T)+\sigma T$を代入）

$$=\Delta\times P(0,T+\Delta)\times L(0,T,T+\Delta)E^{\tilde{Q}_{T+\Delta}}\left[1\{L(0,T,T+\Delta)e^{+\frac{1}{2}\sigma^2 T+\sigma W^{\tilde{Q}_{T+\Delta}}(T)}\geq K\}\right]$$

$$=\Delta\times P(0,T+\Delta)\times L(0,T,T+\Delta)E^{\tilde{Q}_{T+\Delta}}\left[1\{L(0,T,T+\Delta)e^{+\frac{1}{2}\sigma^2 T-\sigma\sqrt{T}Y}\geq K\}\right]$$

ただし、$\tilde{Q}_{T+\Delta}$ の下で $Y \sim N(0,1)$

$$= \Delta \times P(0,T+\Delta) \times L(0,T,T+\Delta) E^{\tilde{Q}_{T+\Delta}}\left[1\left\{ Y \le \frac{\ln L(0,T,T+\Delta)/K + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \right\} \right]$$

$$= \Delta \times P(0,T+\Delta) \times L(0,T,T+\Delta) \times N(\mathrm{d1})$$

ただし、$\mathrm{d1} = \dfrac{\ln(L(0,T,T+\Delta)/K) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} (= \mathrm{d2} + \sigma\sqrt{T})$

以上、前半部分と後半部分の結果を合わせて、ｐ１５７の（６）式を得る。

追加コメント

１章の本文中でのギルザノフの定理の使い方は、まず無くしたいドリフトがあって、それから（その目的を達成するような）新しい確率の作り方（＝ラドンニコディィム微分）がわかると言うものだった。ギルザノフの定理（ｐ３９）をもう一度見ていただければ、これはいわば定理を“下から上に”使っている事がわかるだろう。一方、ここでの使い方は、ラドンニコディィム微分（＝新しい確率の作り方）がまずあって、そこから新しい確率の下でのブラウン運動 $W^{\tilde{Q}_{T+\Delta}}(T) := W^{Q_{T+\Delta}}(T) - \sigma T$ が導かれている。今度は、いわば定理を“上から下へ”使っているわけである。このように“下から上に”と“上から下へ”の両方で使う事によって、ギルザノフノ定理のメインメッセージである「確率 $\Leftrightarrow$ ドリフト」がよりよく確認できるだろう。

以上