

中学レベルからはじめる

いちばんやさしい

AI・データサイエンスのための数学入門

解答例

目次

第 0 章	準備	4
0.1	計算	4
0.2	展開と因数分解	5
0.3	方程式	5
第 1 章	順列, 組み合わせ	7
1.1	順列	7
1.2	組み合わせ	9
1.3	Excel による演習	10
第 2 章	集合, ベン図	12
2.1	集合	12
2.2	ベン図	12
2.3	集合の演算	13
2.4	Excel による演習	15
第 3 章	確率	17
3.1	確率の意味	17
3.2	条件付き確率	19
3.3	Excel による演習	20
第 4 章	代表値	22
4.1	平均値	22
4.2	中央値	23
4.3	最頻値	24
4.4	Excel による演習	25
第 5 章	分散, 標準偏差	27
5.1	分散	27
5.2	標準偏差	28
5.3	Excel による演習	30
第 6 章	相関	31
6.1	共分散	31
6.2	相関係数	32
6.3	相関関係と因果関係	35
6.4	Excel による演習	35
第 7 章	ベクトルの演算	36
7.1	ベクトルと行列	36
7.2	ベクトルの和とスカラー倍	37
7.3	ベクトルの内積	38
7.4	Excel による演習	38
第 8 章	行列の演算	40
8.1	行列の和とスカラー倍	40

8.2	行列の積	41
8.3	Excel による演習	43
第 9 章	多項式関数	45
9.1	多項式関数とは	45
9.2	1 次関数のグラフ	47
9.3	2 次関数のグラフ	49
9.4	Excel による演習	53
第 10 章	指数関数	56
10.1	指数の意味	56
10.2	指数関数のグラフ	60
10.3	Excel による演習	61
第 11 章	対数関数	64
11.1	対数の意味	64
11.2	対数関数のグラフ	65
11.3	Excel による演習	66
第 12 章	微分係数	69
12.1	関数の極限	69
12.2	関数の傾きと微分の関係	70
12.3	Excel による演習	72
第 13 章	1 変数関数の微分法	74
13.1	導関数	74
13.2	関数の増減とグラフ	75
13.3	Excel による演習	77
第 14 章	1 変数関数の積分法	80
14.1	不定積分	80
14.2	積分と面積の関係	80
14.3	定積分	80
14.4	Excel による演習	81

第 0 章 準備

0.1 計算

問題 0-1

$$(1) 10 \div 5 \times 2 = 2 \times 2 = 4$$

$$(2) 20 - 16 \div 2^3 = 20 - 16 \div 8 = 20 - 2 = 18$$

$$(3) 20 \div (100 \div (-5)^2) = 20 \div (100 \div 25) = 20 \div 4 = 5$$

$$(4) 4 - 3 \times (-3) = 4 - (-9) = 13$$

$$(5) 48 \div 2^4 \times 3 = 48 \div 16 \times 3 = 3 \times 3 = 9$$

$$(6) 2 \times (-3)^2 - 6^2 \div 9 \times 4 = 2 \times 9 - 36 \div 9 \times 4 = 18 - 4 \times 4 = 18 - 16 = 2$$

問題 0-2

$$(1) \frac{\frac{2}{9} + \frac{5}{18}}{2} = \frac{\frac{4}{18} + \frac{5}{18}}{2} = \frac{\frac{9}{18}}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} \quad \text{分母, 分子にそれぞれ 2 をかけると} \quad \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

$$(2) \frac{\frac{1}{5} - \frac{7}{12}}{\frac{15}{36} - \frac{14}{36}} = \frac{\frac{1}{15} - \frac{7}{14}}{\frac{1}{36}} \quad \text{分母, 分子にそれぞれ 36 をかけると} \quad = \frac{36}{1} = 36$$

$$(3) \frac{\frac{1}{4} + \frac{5}{6} - \frac{2}{3}}{3} = \frac{\frac{3}{12} + \frac{10}{12} - \frac{8}{12}}{3} = \frac{\frac{5}{12}}{3} \quad \text{分母, 分子にそれぞれ 12 をかけると} \quad = \frac{5}{3 \times 12} = \frac{5}{36}$$

問題 0-3

$$(1) \sqrt{12}^2 = \sqrt{12} \times \sqrt{12} = 12$$

$$(2) (3\sqrt{10})^4 = 3\sqrt{10} \times 3\sqrt{10} \times 3\sqrt{10} \times 3\sqrt{10} = (3 \times 3 \times 3 \times 3) \times (\sqrt{10} \times \sqrt{10}) \times (\sqrt{10} \times \sqrt{10}) = 81 \times 10 \times 10 = 8100$$

$$(3) \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = \sqrt{9 \times 9} = 9$$

$$(4) 10\sqrt{6} - 19\sqrt{6} = (10 - 19)\sqrt{6} = -9\sqrt{6}$$

$$(5) (5\sqrt{10} - 3\sqrt{10})^2 = ((5 - 3)\sqrt{10})^2 = (2\sqrt{10})^2 = 2\sqrt{10} \times 2\sqrt{10} = (2 \times 2) \times (\sqrt{10} \times \sqrt{10}) = 4 \times 10 = 40$$

$$(6) \sqrt[3]{5}^3 = \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} = 5$$

$$(7) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times 1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \times \frac{1 \times 1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$(8) \sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 2$$

0.2 展開と因数分解

問題 0-4

$$(1) (x+10)^2 = x^2 + 2 \times x \times 10 + 10^2 = x^2 + 20x + 100$$

$$(2) (3x-7)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times (-7) + (-7)^2 = 9x^2 - 42x + 49$$

$$(3) (x+6)(x-6) = x^2 - 6^2 = x^2 - 36$$

$$(4) (x-11)(x-2) = x^2 + (-11-2)x + (-11) \times (-2) = x^2 - 13x + 22$$

問題 0-5

$$(1) x^2 - 8x + 16 = x^2 + 2 \times x \times (-4) + (-4)^2 = (x-4)^2$$

$$(2) x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x+1)(x-1)$$

$$(3) x^2 + 7x + 10 = x^2 + (2+5)x + 2 \times 5 = (x+2)(x+5)$$

$$(4) x^2 - 3x - 10 = x^2 + (-5+2)x + (-5) \times 2 = (x-5)(x+2)$$

0.3 方程式

問題 0-6

(1) $2x - 6 = 7x - 9$ の両辺に 6 をたすと, $2x = 7x - 3$ となる. さらに, この両辺から $7x$ をひくと, $-5x = -3$ となる. そして, この両辺を -5 でわると, $x = \frac{-3}{-5}$, つまり, $x = \frac{3}{5}$ となる.

(2) $\frac{2}{9}x = \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}$ の両辺に 18 をかけると, $4x = 15x + 6$ となる. さらに, この両辺から $15x$ をひくと, $-11x = 6$ となる. そして, この両辺を -11 でわると, $x = \frac{6}{-11}$, つまり, $x = -\frac{6}{11}$ となる.

(3) $\frac{x-2}{2} = \frac{3x+2}{10}$ の両辺に 10 をかけると, $5(x-2) = 3x+2$ となる. これは, $5x-10 = 3x+2$ となり, この両辺から $3x$ をひくと, $2x-10 = 2$ となり, さらに 10 をたすと, $2x = 12$ となる. そして, この両辺を 2 でわると, $x = 6$ となる.

問題 0-7

(1) 上の式と下の式の「左辺どうしをひいたもの」と「右辺どうしをひいたもの」は等しくなることより,

$$-8y = 8$$

となり, $y = -1$ であることがわかる. これを上式 ($x - 3y = 9$) に代入すると, $x + 3 = 9$ となり, $x = 6$ となる.

(2) 上の式の両辺を 2 倍した式 $10x - 2y = 24$ と下の式の「左辺どうしをひいたもの」と「右辺どうしをひいたもの」は等しくなることより,

$$9x = 27$$

となり, $x = 3$ であることがわかる. これを上式 ($5x - y = 12$) に代入すると, $15 - y = 12$ となり, $y = 3$

となる.

(3) 上の式と真ん中の式の「左辺どうしをひいたもの」と「右辺どうしをひいたもの」は等しくなることより,

$$-x - 5y = -4$$

となる.

また、真ん中の式の両辺を2倍した式 $6x + 4y - 2z = 2$ と下の式の「左辺どうしをひいたもの」と「右辺どうしをひいたもの」は等しくなることより, $3x + 3y = 0$, つまり,

$$x + y = 0$$

となる.

得られたふたつの式の「左辺どうしをたしたもの」と「右辺どうしをたしたもの」は等しくなることより,

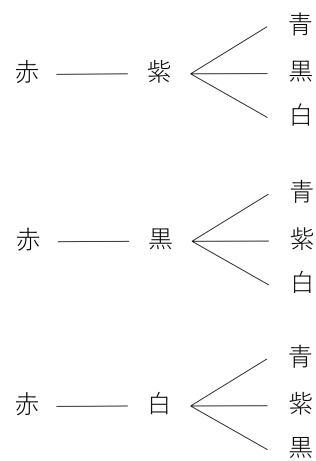
$$-4y = -4$$

となり, $y = 1$ であることがわかる. これを $x + y = 0$ に代入すると, $x + 1 = 0$ となり, $x = -1$ となる. さらに, これらを上の式 ($2x - 3y - z = -3$) に代入すると, $-2 - 3 - z = -3$ となり, $z = -2$ となる.

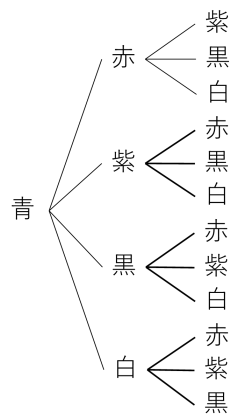
第 1 章 順列，組み合わせ

1.1 順列

問題 1-1



問題 1-2



問題 1-3

「 $4 \times 3 \times 2$ 」つまり 24 通りのぬり方がある。

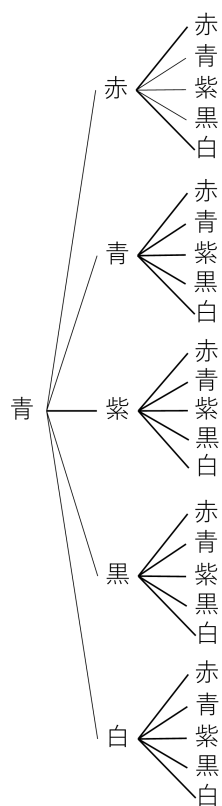
問題 1-4

パスワードは「 $4 \times 3 \times 2 \times 1$ 」つまり 24 パターンある。

問題 1-5

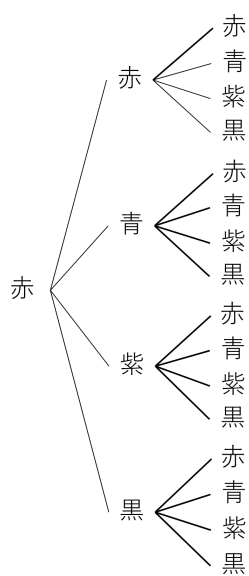
パスワードは「 $7 \times 6 \times 5 \times 4$ 」つまり 840 パターンある.

問題 1-6



問題 1-7

下図は, ○ に赤をぬったときの樹形図である.



これを見ると、○に「赤」をぬったとき、それ以外の色のぬり方は

$$4 \times 4 = 16$$

より、16通りであることがわかる。

また、○に4色「赤、青、紫、黒」のどの色をぬったとしても、それ以外の色のぬり方は、それぞれ「 4×4 」通りあることが確認できる。つまり、求める色のぬり方全体は

$$4 \times 4 \times 4 = 64$$

より、64通りであることがわかる。

問題 1-8

パスワードは「 $4 \times 4 \times 4 \times 4$ 」つまり 256 パターンある。

問題 1-9

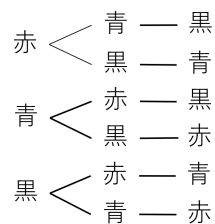
パスワードは「 $7 \times 7 \times 7 \times 7$ 」つまり 2401 パターンある。

1.2 組み合わせ

問題 1-10

丸に「赤」、三角形に「青」、四角形に「黒」、
丸に「赤」、三角形に「黒」、四角形に「青」、
丸に「青」、三角形に「赤」、四角形に「黒」、
丸に「青」、三角形に「黒」、四角形に「赤」、
丸に「黒」、三角形に「赤」、四角形に「青」、
丸に「黒」、三角形に「青」、四角形に「赤」

樹形図だと次のようになる。



問題 1-11

{ 赤, 青, 紫 }, { 赤, 青, 黒 }, { 赤, 青, 白 },
{ 赤, 紫, 黒 }, { 赤, 紫, 白 },
{ 赤, 黒, 白 },
{ 青, 紫, 黒 }, { 青, 紫, 白 },
{ 青, 黒, 白 },
{ 紫, 黒, 白 }

問題 1-12

{ 黒, 白 }, { 紫, 白 }, { 紫, 黒 },
{ 青, 白 }, { 青, 黒 },
{ 青, 紫 },
{ 赤, 白 }, { 赤, 黒 },
{ 赤, 紫 },
{ 赤, 青 }

問題 1-13

必要でない絵の具のパターンは下記である.

{ 赤 }, { 青 }, { 紫 }, { 黒 }

その総数は4である.

ちなみに, 必要な絵の具の組み合わせのパターンは下記である.

{ 青, 紫, 黒 }, { 赤, 紫, 黒 }, { 赤, 青, 黒 }, { 赤, 青, 紫 }

問題 1-14

選ばれない数字のパターンは下記である.

{1}, {2}, {3}, {4}, {5}

その総数は5である. よって, 5 パターンの選び方があることがわかる.

問題 1-15

7つの数字から4つを選んで並べたものの総数は

$$7 \times 6 \times 5 \times 4$$

である (問題 1-5). また, 4つの数字を並べたものの総数は

$$4 \times 3 \times 2 \times 1$$

である (問題 1-4). よって, 求める選び方の総数は

$$\frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35$$

より, 35 となる. よって, 35 パターンの選び方があることがわかる.

1.3 Excel による演習

問題 1-16

あるセルに「=PERMUT(4,4)」と入力すると, ${}_4P_4$ の値 24 が計算される.

または, セルに「=4*3*2*1」と入力して求めてもいい.

問題 1-17

あるセルに「=PERMUT(7,4)」と入力すると, ${}_7P_4$ の値 840 が計算される.

または, セルに「=7*6*5*4」と入力して求めてもいい.

問題 1-18

あるセルに「=4^4」または「=4*4*4*4」と入力すると、「 $4 \times 4 \times 4 \times 4$ 」の値 256 が計算される。

問題 1-19

あるセルに「=7^4」または「=7*7*7*7」と入力すると、「 $7 \times 7 \times 7 \times 7$ 」の値 2401 が計算される。

問題 1-20

あるセルに「=COMBIN(5,4)」と入力すると、 ${}_5C_4$ の値 5 が計算される。

または、セルに「=(5*4*3*2)/(4*3*2*1)」と入力して求めてもいい。

問題 1-21

あるセルに「=COMBIN(7,4)」と入力すると、 ${}_7C_4$ の値 35 が計算される。

または、セルに「=(7*6*5*4)/(4*3*2*1)」と入力して求めてもいい。

第2章 集合，ベン図

2.1 集合

問題 2-1

(1) \notin

(2) \notin

(3) \in

問題 2-2

(1) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

(2) $B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$

(3) $C = \{11, 13, 15, 17, 19\}$

問題 2-3

$$\{3, 6, 9\} = \{n \mid n \text{ は } 9 \text{ 以下の正の } 3 \text{ の倍数}\},$$

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\} = \{n \mid n \text{ は } 30 \text{ 以下の素数}\}$$

問題 2-4

$$\{3, 6, 9\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\} \subset \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$$

問題 2-5

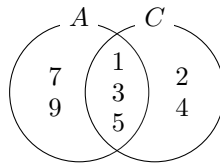
集合 $\{1, 2, 3\}$ の部分集合は次の 8 つの集合である．

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

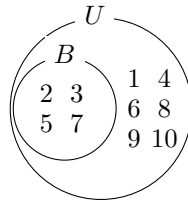
2.2 ベン図

問題 2-6

それぞれのベン図は次のようになる．

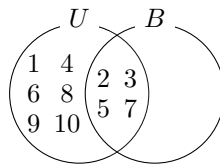


集合 A, C をあらわすベン図



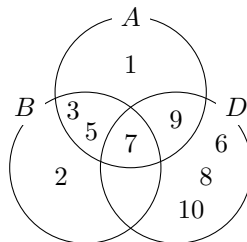
集合 U, B をあらわすベン図

または



集合 U, B をあらわすベン図

問題 2-7



集合 A, B, D をあらわすベン図

2.3 集合の演算

問題 2-8

- (1) $A \cap C = \{1, 3, 5\}$
- (2) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$
- (3) $B \cap C = \{2, 3, 5\}$
- (4) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
- (5) $C \cap D = \emptyset$
- (6) $C \cup D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$(7) U \cap A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$(8) U \cup A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

問題 2-9

集合 A, B, C を下記のようにする.

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, \quad B = \{0, 3, 6, 9\}, \quad C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

このとき,

$$A \cup (B \cap C) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{0, 3\} = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 10\},$$

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\} = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$$

また,

$$A \cap (B \cup C) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\} = \{0, 2, 4, 6\},$$

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{0, 6\} \cup \{0, 2, 4\} = \{0, 2, 4, 6\}$$

となることがわかり,

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

が成り立つことが確認できる.

問題 2-10

$$(1) A - C = \{7, 9\}$$

$$(2) C - A = \{2, 4\}$$

$$(3) B - C = \{7\}$$

$$(4) C - B = \{1, 4\}$$

$$(5) C - D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$(6) D - C = \{6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$(7) U - A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$(8) A - U = \emptyset$$

問題 2-11

$$\overline{C} = \{6, 7, 8, 9, 10\}, \quad \overline{D} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

問題 2-12

$$(1) \overline{A \cup C} = \overline{\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}} = \{6, 8, 10\}$$

$$(2) \overline{A \cap C} = \overline{\{1, 3, 5\}} = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$(3) \overline{A} \cap \overline{C} = \{2, 4, 6, 8, 10\} \cap \{6, 7, 8, 9, 10\} = \{6, 8, 10\}$$

$$(4) \overline{A \cup C} = \{2, 4, 6, 8, 10\} \cup \{6, 7, 8, 9, 10\} = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

以上より，ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cup C} = \overline{A} \cap \overline{C}, \quad \overline{A \cap C} = \overline{A} \cup \overline{C}$$

が成り立つことが確認できる．

問題 2-13

全体集合 U を

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

とし，集合 A, B を下記のようにする．

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}, \quad B = \{0, 3, 6, 9\}$$

このとき，

$$\overline{A \cup B} = \overline{\{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}} = \{1, 5, 7\}, \quad \overline{A \cap B} = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\} = \{1, 5, 7\}$$

また，

$$\overline{A \cap B} = \overline{\{0, 6\}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\},$$

$$\overline{A \cup B} = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}$$

となることがわかり，ド・モルガンの法則

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

が成り立つことが確認できる．

2.4 Excel による演習

問題 2-14

セル F2 に，「=AND(D2=TRUE,E2=TRUE)」と入力する．すると，「セル D2 が TRUE，かつ，セル E2 が TRUE」であるかどうか判定される（判定が真なら「TRUE」，偽なら「FALSE」が返される）．

セル G2 には，「=NOT(F2)」と入力し，セル F2 の否定を表示させる．すると，セル F2 が「FALSE」なら「TRUE」が返され，セル D2 が「FALSE」なら「TRUE」が返される．

セル H2 には，「=OR(D2=FALSE,E2=FALSE)」と入力する（OR 関数を使う）．すると，「セル D2 が FALSE，または，セル E2 が FALSE」であるかどうか判定される（判定が真なら「TRUE」，偽なら「FALSE」が返される）．

そして，セル範囲 F2:H2 を選択し，この範囲の右下あたりにマウスポインタを合わせるとマウスポインタが「+」の形になるので，この状態のまま 21 行目まで下にドラッグし，オートフィルしよう．

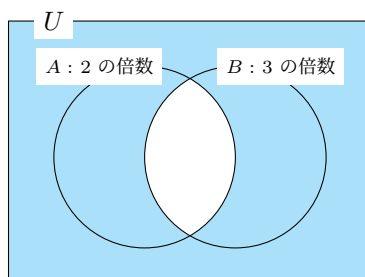
	A	B	C	D	E	F	G	H
1		2で割った余り	3で割った余り	2の倍数	3の倍数	2の倍数かつ3の倍数	「2の倍数かつ3の倍数」でない	「2の倍数でない」または「3の倍数でない」
2	1	1	1	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE
3	2	0	2	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE
4	3	1	0	FALSE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE
5	4	0	1	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE
6	5	1	2	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE
7	6	0	0	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE
8	7	1	1	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE
9	8	0	2	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE
10	9	1	0	FALSE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE
11	10	0	1	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE
12	11	1	2	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE
13	12	0	0	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE
14	13	1	1	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE
15	14	0	2	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE
16	15	1	0	FALSE	TRUE	FALSE	TRUE	TRUE
17	16	0	1	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE
18	17	1	2	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE
19	18	0	0	TRUE	TRUE	TRUE	FALSE	FALSE
20	19	1	1	FALSE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE
21	20	0	2	TRUE	FALSE	FALSE	TRUE	TRUE
22								
23								
24								

ここで、 A つまり「20 以下の正の 2 の倍数の集合」は、「対応する D 列のセルが「TRUE」である整数の集合」である。また、 B つまり「20 以下の正の 3 の倍数の集合」は、「対応する E 列のセルが「TRUE」である整数の集合」である。

そして、 $\overline{A \cap B}$ は、「対応する G 列のセルが「TRUE」である整数の集合」であり、また、 $\overline{A \cup B}$ は、「対応する H 列のセルが「TRUE」である整数の集合」である。

よって、次が確認できる。

$$\overline{A \cap B} = \overline{A \cup B}$$



$$\overline{A \cap B} = \overline{A \cup B}$$

第3章 確率

3.1 確率の意味

問題 3-1

「2の目が出る」という事象 B は,

$$B = \{2\}$$

というようにあらわすことができ、「素数の目が出る」という事象 P は,

$$P = \{2, 3, 5\}$$

というようにあらわすことができる.

問題 3-2

根元事象は6個あり, それぞれ次のようにあらわすことができる.

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$$

問題 3-3

根元事象は2個あり, それぞれ次のようにあらわすことができる.

$$\{\text{表}\}, \{\text{裏}\}$$

問題 3-4

出る目についてのすべての場合は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ なので6通りある. また, 3の目が出る場合は $\{3\}$, 5の目が出る場合は $\{5\}$ なので, それぞれ1通りである. よって, サイコロを振ったときに3の目が出る確率, および, 5の目が出る確率は, どちらも $1/6$ であることがわかる.

問題 3-5

出る目についてのすべての場合は $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ なので6通りあり, 奇数の目が出る場合は $\{1, 3, 5\}$ なので3通りである. よって, 求める確率は $(3/6 =) 1/2$ であることがわかる.

問題 3-6

すべての場合は $\{\text{表}, \text{裏}\}$ なので2通りあり, 裏が出る場合は $\{\text{裏}\}$ なので1通りである. よって, 求める確率は $1/2$ であることがわかる.

問題 3-7

さいころを振ったときに「偶数の目が出ること」は「奇数の目が出ること」の余事象なので,

$$\text{「偶数の目が出る確率」} = 1 - \text{「奇数の目が出る確率 (1/2)」}$$

と計算して求めることができる． よって、求める「偶数の目が出る確率」は $1/2$ である．

問題 3-8

出る目についてのすべての場合は

$\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$
 $(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),$
 $(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),$
 $(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),$
 $(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),$
 $(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

なので、 6×6 より 36 通りあり、どちらも 1 の目が出る場合は

$\{(1, 1)\}$

なので、1 通りである． よって、求める確率は $1/36$ である．

問題 3-9

さいころを 2 回振ったときに「互いに異なる目が出ること」は「同じ目が出ること」の余事象なので、

「互いに異なる目が出る確率」 $= 1 -$ 「同じ目が出る確率 ($1/6$)」

と計算して求めることができる． よって、求める「互いに異なる目が出る確率」は $5/6$ である（「同じ目が出る確率」については例題 3-3 参照）．

問題 3-10

すべての場合は $\{(\text{表}, \text{表}), (\text{表}, \text{裏}), (\text{裏}, \text{表}), (\text{裏}, \text{裏})\}$ なので 4 通りあり、どちらも裏が出る場合は $\{(\text{裏}, \text{裏})\}$ なので 1 通りである． よって、求める確率は $1/4$ であることがわかる．

問題 3-11

すべての場合は $\{(\text{表}, \text{表}), (\text{表}, \text{裏}), (\text{裏}, \text{表}), (\text{裏}, \text{裏})\}$ なので 4 通りあり、1 回だけ表が出る場合は $\{(\text{表}, \text{裏}), (\text{裏}, \text{表})\}$ なので 2 通りである． よって、求める確率は $(2/4 =) 1/2$ であることがわかる．

問題 3-12

すべての場合は $\{(\text{表}, \text{表}), (\text{表}, \text{裏}), (\text{裏}, \text{表}), (\text{裏}, \text{裏})\}$ なので 4 通りあり、少なくとも 1 回は表が出る場合は $\{(\text{表}, \text{表}), (\text{表}, \text{裏}), (\text{裏}, \text{表})\}$ なので 3 通りである． よって、求める確率は $3/4$ であることがわかる．

[別解] コインを 2 回投げたときに「少なくとも 1 回は表が出ること」は「どちらも裏が出ること」の余事象なので、

「少なくとも 1 回は表が出る確率」 $= 1 -$ 「どちらも裏が出る確率 ($1/4$)」

と計算して求めてもいい（「どちらも裏が出る確率」については問題 3-10 参照）．

問題 3-13

すべての場合は $\{(\text{表}, \text{表}), (\text{表}, \text{裏}), (\text{裏}, \text{表}), (\text{裏}, \text{裏})\}$ なので 4 通りあり、2 回目に表が出る場合は $\{(\text{表}, \text{表}), (\text{裏}, \text{表})\}$ なので 2 通りである． よって、求める確率は $(2/4 =) 1/2$ であることがわかる．

3.2 条件付き確率

問題 3-14

奇数の目が出たことは確定しているので、 $\{1, 3, 5\}$ の 3 通りのなかでの 1 の目が出る割合を考えればいい。このなかで 1 の目が出る場合は $\{1\}$ の 1 通りだけなので、求める確率は $1/3$ であることがわかる。

問題 3-15

奇数の目が出たことは確定しているので、 $\{1, 3, 5\}$ の 3 通りのなかでの 3 以上の目が出る割合を考えればいい。このなかで 3 以上の目が出る場合は $\{3, 5\}$ の 2 通りだけなので、求める確率は $2/3$ であることがわかる。

問題 3-16

少なくとも 1 回は裏が出たことは確定しているので、 $\{(\text{表}, \text{裏}), (\text{裏}, \text{表}), (\text{裏}, \text{裏})\}$ の 3 通りのなかでの 2 回とも裏である割合を考えればいい。2 回とも裏である場合は $\{(\text{裏}, \text{裏})\}$ の 1 通りだけなので、求める確率は $1/3$ であることがわかる。

問題 3-17

「1 回目に奇数の目が出るという事象」と「2 回目に奇数の目が出るという事象」と「3 回目に奇数の目が出るという事象」と「4 回目に奇数の目が出るという事象」は独立なので、サイコロを 4 回振ったときにどれも奇数の目が出る確率は

$$\begin{aligned} & \text{「1 回目に奇数の目が出る確率」} \times \text{「2 回目に奇数の目が出る確率」} \\ & \times \text{「3 回目に奇数の目が出る確率」} \times \text{「4 回目に奇数の目が出る確率」} \\ & = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

と計算して求めることができ、 $1/16$ であることがわかる（独立事象の乗法定理）。

問題 3-18

「1 回目に 1 の目が出るという事象」と「2 回目に 1 の目が出るという事象」と「3 回目に 1 の目が出るという事象」と「4 回目に 1 の目が出るという事象」は独立なので、サイコロを 4 回振ったときにどれも 1 の目が出る確率は

$$\begin{aligned} & \text{「1 回目に 1 の目が出る確率」} \times \text{「2 回目に 1 の目が出る確率」} \\ & \times \text{「3 回目に 1 の目が出る確率」} \times \text{「4 回目に 1 の目が出る確率」} \\ & = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{1296} \end{aligned}$$

と計算して求めることができ、 $1/1296$ であることがわかる（独立事象の乗法定理）。

問題 3-19

「1 回目に裏が出るという事象」と「2 回目に裏が出るという事象」と「3 回目に裏が出るという事象」と「4 回目に裏が出るという事象」と「5 回目に裏が出るという事象」は独立なので、コインを 5 回投げたときにどれも裏が出る確率は

$$\text{「1 回目に裏が出る確率」} \times \text{「2 回目に裏が出る確率」} \times \text{「3 回目に裏が出る確率」}$$

×「4 回目に裏が出る確率」×「5 回目に裏が出る確率」

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

と計算して求めることができ、1/32 であることがわかる（独立事象の乗法定理）。

問題 3-20

コインを 5 回投げたときに「少なくとも 1 回は表が出ること」は「どれも裏が出ること」の余事象なので、

$$\text{「少なくとも 1 回は表が出る確率」} = 1 - \text{「どれも裏が出る確率」} = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

と計算して求めることができる（「どれも裏が出る確率」については問題 3-19 参照）。

3.3 Excel による演習

問題 3-21

セル A2 に「=RANDBETWEEN(1,6)」と入力し、このセルを 101 行目まで下にオートフィルする。すると、A 列に 1 から 6 までの整数の乱数が 100 個発生する。

つぎに、条件をみたすセルの個数を返す COUNTIF 関数を使って、A 列にある「1」と表示されているセルの個数を求めよう。

セル C2 に「=COUNTIF(」と入力し、列番号 A（セル A1 のすぐ上）をクリックし、A 列全体を指定する。続けて、「,1)」と入力し、Enter キーを押す。セルには「=COUNTIF(A:A,1)」と入力され、A 列にある「1」と表示されているセルの個数が返される。

そして、セル D2 には「=C2/100」と入力し、1 の目が出る割合

$$\frac{\text{1 の目が出る回数}}{\text{サイコロを振る回数}}$$

を計算する。この値が 1 の目が出る確率 1/6 (= 0.166...) に近いことが確認できる。

	A	B	C	D	E	F	G
1	試行		1の目が出る回数	1の目が出る割合			
2	3		17	0.17			
3	1						
4	6						
5	1						
6	3						
7	4						
8	2						
9	5						
10	2						
11	3						
12	3						
13	1						
14	2						
15	4						
16	1						
17	4						
18	5						
19	1						
20	5						
21	6						
22	1						
23	6						

問題 3-22

A 列にある奇数が表示されているセルの個数を求める計算式

「=COUNTIF(A:A,1)+COUNTIF(A:A,3)+COUNTIF(A:A,5)」をセル C5 に入力する。そして、奇数の目が出る割合

$$\frac{\text{奇数の目が出る回数}}{\text{さいころを振る回数}}$$

を求める計算式「=C5/100」をセル D5 に入力する。この結果が、さいころを振ったときの奇数の目が出る確率 $1/2 (= 0.5)$ に近い値になることが確認できる。

	A	B	C	D	E	F	G
1	試行		1の目が出る回数	1の目が出る割合			
2	1		17	0.17			
3	4						
4	3		奇数の目が出る回数	奇数の目が出る割合			
5	1		50	0.5			
6	2						
7	6						
8	5						
9	5						
10	4						
11	6						
12	2						
13	3						
14	2						
15	2						
16	3						
17	1						
18	6						
19	1						
20	2						
21	3						
22	2						
23	2						

第 4 章 代表値

4.1 平均値

問題 4-1

収穫したきのこの本数の合計をデータの個数 8 で割ればいいので，相加平均値を求めることになる．

$$\frac{7 + 1 + 0 + 15 + 8 + 6 + 3 + 0}{8} = \frac{40}{8} = 5$$

より，5 本ずつとなることがわかる．

問題 4-2

クラス全員の点数の合計を平均点でわれば，クラスの人数がわかる．

$$\frac{2010}{67} = 30$$

より，人数は 30 であることがわかる．

問題 4-3

10 名の体重の平均値は 60.0 kg なので，合計は

$$60 \times 10 = 600$$

より，600 kg である．つぎに，一番大きい体重を除いた平均値は 56.9 kg なので，一番大きい体重を除いた合計は

$$56.9 \times 9 = 512.1$$

より，512.1 kg である．よって，一番大きい体重は

$$600 - 512.1 = 87.9$$

より，87.9 kg であることがわかる．また，一番小さい体重を除いた平均値は 61.8 kg なので，一番小さい体重を除いた合計は

$$61.8 \times 9 = 556.2$$

より，556.2 kg である．よって，一番小さい体重は

$$600 - 556.2 = 43.8$$

より，43.8 kg であることがわかる．

問題 4-4

3 年目の売り上げは 1 年目の 9×4 倍に伸びている．つまり，1 年目から 3 年目で 36 倍伸びていることになる．ということは，売り上げの伸びの倍率をならす（平均する）と，

1 年目から 2 年目：6 倍

2 年目から 3 年目：さらに 6 倍

となり、その結果、 6×6 より 36 倍となったと考えることができる。つまり、1 年間の売り上げの伸びの平均倍率は **9 と 4 の幾何平均値**

$$\sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6$$

を使って求められるということである。よって、求める平均倍率は 6（倍）であることがわかる。

問題 4-5

速さ 30 km/時 で 1 時間移動したとき進んだ距離は 30 km である。また、速さ 10 km/時 で 1 時間移動したとき進んだ距離は 10 km である。

よって、平均の速さは

$$\frac{30 + 10}{1 + 1} = 20 \text{ (km/時)} \quad \left(\text{速さ} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}} \right)$$

と計算され、20 km/時 となることがわかる。

問題 4-6

まず、K くんの家から学校までの距離を x km とすると、往復の距離は

$$x \times 2 = 2x \text{ (km)}$$

である。また、往復でかかる時間は

$$\left(\frac{x}{30} + \frac{x}{10} \right) \text{ 時間} \quad \left(\text{時間} = \frac{\text{距離}}{\text{速さ}} \right)$$

である。よって、往復の距離を往復でかかる時間で割ると、

$$\frac{2x}{\frac{x}{30} + \frac{x}{10}} \quad \text{分母、分子をそれぞれ } x \text{ で割ると} \quad \frac{2}{\frac{1}{30} + \frac{1}{10}} = 15 \text{ (km/時)} \quad \left(\text{速さ} = \frac{\text{距離}}{\text{時間}} \right)$$

となり、往復での平均の速さは 15 km/時 となることがわかる。

なお、この「15」というのは、30 と 10 のそれぞれの逆数の相加平均値 $\frac{\frac{1}{30} + \frac{1}{10}}{2}$ の逆数 $\frac{2}{\frac{1}{30} + \frac{1}{10}}$ を求めている。つまり、**30 と 10 の調和平均値**を求めているのである。

4.2 中央値

問題 4-7

中央値 85 を基準にクラス分けをすると、

点数が中央値未満のクラス： $\{50, 50, 55, 60, 80\}$

点数が中央値より大きいクラス： $\{90, 95, 100, 100, 100\}$

となり、ちょうど半々に分かれることが確認できる。

問題 4-8

平均値 78 を基準にクラス分けをすると、次のようになる。

点数が平均値未満のクラス：{50, 50, 55, 60}

点数が平均値より大きいクラス：{80, 90, 95, 100, 100, 100}

問題 4-9

平均値は

$$\frac{1200 + 1000 + 1050 + 1100 + 1050 + 1000 + 1300 + 980 + 1000 + 1000 + 1200 + 10500}{12} = \frac{22380}{12} = 1865$$

より, 1865 円となる.

つぎに, データを小さい順に並べると,

980, 1000, 1000, 1000, 1000, 1050, 1050, 1100, 1200, 1200, 1300, 10500

となる. データは全部で **12** 個あるので, 真ん中の値は「(**12**/2 =) 6 番目に小さい値の 1050」と「(**12**/2 + 1 =) 7 番目に小さい値の 1050」である. データの個数が偶数のとき (つまり真ん中の値が 2 つあるとき) は「真ん中の 2 つの値の平均値」を中央値とするので, 中央値は

$$\frac{1050 + 1050}{2} = 1050$$

より, 1050 円であることがわかる.

問題 4-10

平均値は

$$\frac{35 + 44 + 66 + 34 + 41 + 103 + 68 + 49 + 73}{9} = \frac{513}{9} = 57$$

より, 57 万円となる.

つぎに, データを小さい順に並べると,

34, 35, 41, 44, 49, 66, 68, 73, 103

となる. データは全部で **9** 個あるので, 真ん中の値は「(**9** + 1)/2 =) 5 番目に小さい値の 49」である. データの個数が奇数であるとき (つまり真ん中の値が 1 つのとき) はその真ん中の値をそのまま中央値とするので, 中央値は 49 万円であることがわかる.

4.3 最頻値

問題 4-11

データを小さい順に並べると,

50, 50, 55, 60, 80, 90, 95, 100, 100, 100

となり, 一番多くあらわれるデータは, 「100」であることがわかる (3 回あらわれる). よって, 最頻値は 100 点である.

問題 4-12

データを小さい順に並べると,

980, 1000, 1000, 1000, 1000, 1050, 1050, 1100, 1200, 1200, 1300

となり、一番多くあらわれるデータは、「1000」であることがわかる（4 回あらわれる）。よって、最頻値は 1000 円である。

問題 4-13

$$\text{平均値} = \frac{\text{合計}}{\text{個数}} \quad \text{より} \quad \text{合計} = \text{平均値} \times \text{個数}$$

なので、求めるデータの合計は

$$4.5 \times 10 = 45$$

より、45 であることがわかる。

問題 4-14

$$\text{平均値} = \frac{\text{合計}}{\text{個数}} \quad \text{より} \quad \text{個数} = \frac{\text{合計}}{\text{平均値}}$$

なので、求めるデータの個数は

$$\frac{817}{43} = 19$$

より、19 であることがわかる。

4.4 Excel による演習

問題 4-15

幾何平均値は GEOMEAN 関数で求めよう。

たとえば、下記のようにデータ入力し、セル B5 に「=GEOMEAN(B1:B3)」と入力すると、幾何平均値 50 が返される。

B5		fx		=GEOMEAN(B1:B3)		
	A	B	C	D	E	F
1		25				
2		50				
3		100				
4						
5	幾何平均値	50				
6						
7						

問題 4-16

相加平均値は AVERAGE 関数、また、調和平均値は HARMEAN 関数でそれぞれ求めよう。

たとえば、下記のようにデータ入力し、セル B6 に「=AVERAGE(B1:B4)」, セル B7 に「=HARMEAN(B1:B4)」と入力すると、相加平均値 10, 調和平均値 9 がそれぞれ返される。

B7						
	A	B	C	D	E	F
1		15				
2		9				
3		6				
4		10				
5						
6	相加平均値	10				
7	調和平均値	9				
8						
9						

問題 4-17

平均値は AVERAGE 関数、中央値は MEDIAN 関数、最頻値は MODE.MULT 関数でそれぞれ求めよう。

たとえば、下記のようにデータ入力し、セル B14 に「=AVERAGE(B1:B12)」, セル B15 に「=MEDIAN(B1:B12)」, セル B16 に「=MODE.MULT(B1:B12)」と入力すると、平均値 10.75, 中央値 10.5, 最頻値 13 がそれぞれ返される。

B16						
	A	B	C	D	E	F
1		13				
2		8				
3		11				
4		10				
5		9				
6		11				
7		13				
8		13				
9		7				
10		9				
11		10				
12		15				
13						
14	平均値	10.75				
15	中央値	10.5				
16	最頻値	13				
17						
18						

第5章 分散，標準偏差

5.1 分散

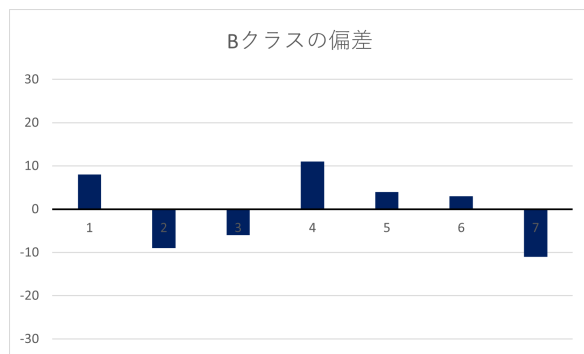
問題 5-1

B クラスの点数についての偏差（点数－平均値 60）はそれぞれ

$$68 - 60, 51 - 60, 54 - 60, 71 - 60, 64 - 60, 63 - 60, 49 - 60$$

つまり，8，－9，－6，11，4，3，－11 である．

よって，B クラスの点数の偏差についての棒グラフをつくると下記のようになり，偏差は 0 を中心にばらついていることが確認できる．



B クラスの偏差についての棒グラフ

問題 5-2

B クラスの点数についての偏差の平均値は，

$$\frac{8 + (-9) + (-6) + 11 + 4 + 3 + (-11)}{7} = \frac{0}{7} = 0$$

より，0 となる．

問題 5-3

B クラスの点数についての偏差の 2 乗の平均値は，

$$\frac{8^2 + (-9)^2 + (-6)^2 + 11^2 + 4^2 + 3^2 + (-11)^2}{7} = \frac{64 + 81 + 36 + 121 + 16 + 9 + 121}{7} \\ = \frac{448}{7} = 64$$

より，64 となる．

問題 5-4

まず，平均値を求めると，

$$\frac{7 + 1 + 4 + 8 + 9 + 8 + 0 + 6 + 2 + 5}{7} = \frac{50}{10} = 5$$

より、5（点）であることがわかる。よって、偏差は

$$7-5, 1-5, 4-5, 8-5, 9-5, 8-5, 0-5, 6-5, 2-5, 5-5$$

つまり、2, -4, -1, 3, 4, 3, -5, 1, -3, 0 となる。

これより分散は、

$$\frac{2^2 + (-4)^2 + (-1)^2 + 3^2 + 4^2 + 3^2 + (-5)^2 + 1^2 + (-3)^2 + 0^2}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

と計算され、9（点²）であることがわかる。

問題 5-5

例題 5-3 と問題 5-4 より、1 組の点数の分散は 1（点²）であり、2 組の点数の分散は 9（点²）であることがわかった。よって、ばらつきが大きいと考えられるのは、2 組の点数である。

問題 5-6

偏差はデータから平均値をひいたものなので、データは偏差に平均値をたしたものである。平均値が 10 なので、求めるデータの値はそれぞれ

$$6+10, 1+10, -4+10, -14+10, 11+10$$

つまり、16, 11, 6, -4, 21 となる。

また、分散は、

$$\frac{6^2 + 1^2 + (-4)^2 + (-14)^2 + 11^2}{5} = \frac{370}{5} = 74$$

と計算され、74 であることがわかる。

5.2 標準偏差

問題 5-7

例題 5-2 より、A クラスの点数の分散は 400（点²）であることがわかっている。よって、標準偏差は

$$\sqrt{400} = 20$$

より、20（点）となる。

また、問題 5-3 より、B クラスの点数の分散は 64（点²）であることがわかっている。よって、標準偏差は

$$\sqrt{64} = 8$$

より、8（点）となる。

問題 5-8

例題 5-3 より、1 組の点数の分散は 1（点²）であることがわかっている。よって、標準偏差は

$$\sqrt{1} = 1$$

より、1（点）となる。

また、問題 5-4 より、B クラスの点数の分散は 9 (点²) であることがわかっている。よって、標準偏差は

$$\sqrt{9} = 3$$

より、3 (点) となる。

問題 5-9

まず、平均値を求めると、

$$\frac{32 + 35 + 28 + 25 + 29 + 35 + 35 + 25 + 31 + 25}{10} = \frac{300}{10} = 30$$

より、30 (人) であることがわかる。よって、偏差は

$$32 - 30, 35 - 30, 28 - 30, 25 - 30, 29 - 30, 35 - 30, 35 - 30, 25 - 30, 31 - 30, 25 - 30$$

つまり、2, 5, -2, -5, -1, 5, 5, -5, 1, -5 となる。

これより分散は、

$$\frac{2^2 + 5^2 + (-2)^2 + (-5)^2 + (-1)^2 + 5^2 + 5^2 + (-5)^2 + 1^2 + (-5)^2}{10} = \frac{160}{10} = 16$$

と計算され、16 (人²) であることがわかる。よって、標準偏差は

$$\sqrt{16} = 4$$

より、4 (人) となる。

問題 5-10

標準偏差が 100 のとき分散は

$$100 \times 100 = 10000$$

より、10000 となる。

また、分散が 100 のとき標準偏差は

$$\sqrt{100} = 10$$

より、10 となる。

問題 5-11

各データを 10 倍したデータ「70, 100, 130, 110, 90」について、平均値は、

$$\frac{70 + 100 + 130 + 110 + 90}{5} = \frac{500}{5} = 100$$

より、100 である。つまり、**元のデータの平均値の 10 倍になる**ことがわかる。偏差は次のようになる。

$$70 - 100, 100 - 100, 130 - 100, 110 - 100, 90 - 100 \quad \text{つまり} \quad -30, 0, 30, 10, -10$$

これより分散は、

$$\frac{(-30)^2 + 0^2 + 30^2 + 10^2 + (-10)^2}{5} = \frac{2000}{5} = 400$$

と計算され、400 であることがわかる。よって、標準偏差は $\sqrt{400} = 20$ より、20 となり、**元のデータの標準偏差の 10 倍になる**ことがわかる。

5.3 Excel による演習

問題 5-12

データを入力し、セル B14 に「=AVERAGE(」と入力し、セル範囲 B2:B13 をドラッグして指定して、Enter キーを押す。セルには「=AVERAGE(B2:B13)」と入力され、平均値 13.625 が返される。

また、セル B15 に「=STDEV.P(」と入力し、セル範囲 B2:B13 をドラッグして指定して、Enter キーを押す。セルには「=STDEV.P(B2:B13)」と入力され、標準偏差の値 5.3154061... が返される。

B15							
	A	B	C	D	E	F	G
1		気温 (°C)					
2	1月	21.4					
3	2月	20.3					
4	3月	17.7					
5	4月	13.5					
6	5月	9.5					
7	6月	7.1					
8	7月	6.1					
9	8月	7.3					
10	9月	10.4					
11	10月	13.5					
12	11月	16.6					
13	12月	20.1					
14	平均値	13.625					
15	標準偏差	5.3154061					
16							
17							
18							

問題 5-13

例題 5-7 のファイルを開き、セル範囲 B2:B11 に入力されている 10 個のデータ

151, 182, 154, 157, 158, 173, 158, 155, 178, 163

を下記のデータに変更すればいい。

1.51, 1.82, 1.54, 1.57, 1.58, 1.73, 1.58, 1.55, 1.78, 1.63

すると、各データの値が 1/100 倍に変更されることにより、標準偏差も 1/100 倍になることが確認できる。

問題 5-14

セル C1 に「気温の偏差 (°C)」と入力し、C 列に偏差、つまり、「各データから平均値をひいたもの」を計算しよう。セル C2 に「=」を入力し、セル B2 をクリックする。続けて、「-」を入力し、平均値が計算されたセル (B14) をクリックする。そして、そのまま F4 キー (設定によっては Fn キー +F4 キー) を押すと、「=B2-\$B\$14」となる。「14」の前に「\$」記号が付き、オートフィルする際に「14 (行目)」が固定される (「B (列)」は固定する必要がないので、F4 キーを 2 回押し、「=B2-B\$14」としてもいい)。このセル (C2) を 13 行目まで下にドラッグし、オートフィルする。

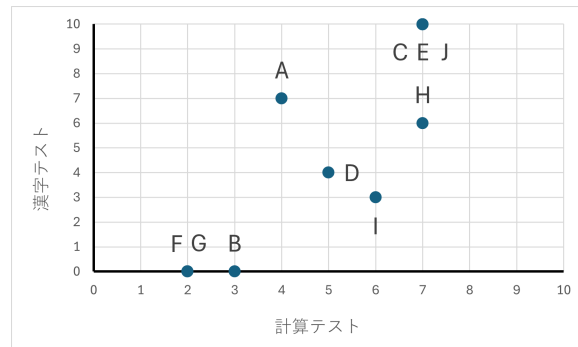
つぎに、セル範囲 A1:A13 を選択したあと、Ctrl キーを押しながら C1:D13 を選択して、挿入タブの (グラフグループにある) [縦棒/横棒グラフの挿入] の「2-D 縦棒」の「集合縦棒」を選ぶ。

レイアウトやスタイルは、グラフのデザインタブと書式タブを使って自由に変更しよう。

第 6 章 相関

6.1 共分散

問題 6-1



計算テストの点数を横軸とし漢字テストの点数を縦軸とする散布図

問題 6-2

「計算テストの偏差 × 漢字テストの偏差」の値を A, B, C, D, E, F, G, H の順に計算すると,

$$(-1) \times 2, (-2) \times (-5), 2 \times 5, 0 \times (-1), 2 \times 5,$$

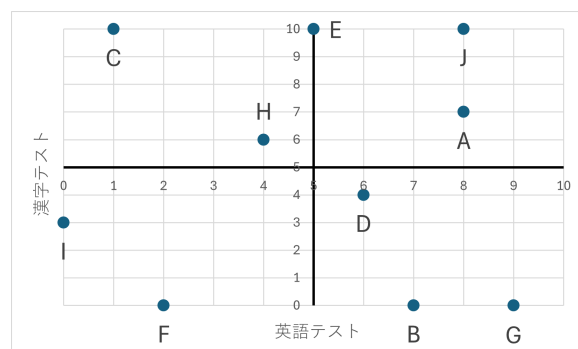
$$(-3) \times (-5), (-3) \times (-5), 2 \times 1, 1 \times (-2), 2 \times 5$$

つまり, $-2, 10, 10, 0, 10, 15, 15, 2, -2, 10$ となる. それぞれ符号 (+ or -) を確認すると, 順に

$-, +, +, \text{符号なし}, +, +, +, +, -, +$

となる.

問題 6-3



英語テストの点数を横軸とし漢字テストの点数を縦軸とする散布図

問題 6-4

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J の順にそれぞれ偏差を計算すると、英語テストの点数については

$$8 - 5, 7 - 5, 1 - 5, 6 - 5, 5 - 5, 2 - 5, 9 - 5, 4 - 5, 0 - 5, 8 - 5$$

つまり、3, 2, -4, 1, 0, -3, 4, -1, -5, 3 となり、漢字テストの点数については

$$7 - 5, 0 - 5, 10 - 5, 4 - 5, 10 - 5, 0 - 5, 0 - 5, 6 - 5, 3 - 5, 10 - 5$$

つまり、2, -5, 5, -1, 5, -5, -5, 1, -2, 5 となるのがわかる。

	英語テスト偏差	漢字テスト偏差
A	3	2
B	2	-5
C	-4	5
D	1	-1
E	0	5
F	-3	-5
G	4	-5
H	-1	1
I	-5	-2
J	3	5

英語テストの点数の偏差と漢字テストの点数の偏差

問題 6-5

「英語テストの偏差 × 漢字テストの偏差」の値を A, B, C, D, E, F, G, H の順に計算すると、

$$3 \times 2, 2 \times (-5), (-4) \times 5, 1 \times (-1), 0 \times 5,$$

$$(-3) \times (-5), 4 \times (-5), (-1) \times 1, (-5) \times (-2), 3 \times 5$$

つまり、6, -10, -20, -1, 0, 15, -20, -1, 10, 15 となる。

問題 6-6

英語テストの点数と漢字テストの点数の共分散は、「英語テストの偏差 × 漢字テストの偏差」の平均値なので、

$$\frac{6 + (-10) + (-20) + (-1) + 0 + 15 + (-20) + (-1) + 10 + 15}{10} = \frac{-6}{10} = -0.6$$

より、-0.6 となる。

6.2 相関係数

問題 6-7

漢字テストについて、分散（偏差の 2 乗の平均値）を計算すると、

$$\frac{2^2 + (-5)^2 + 5^2 + (-1)^2 + 5^2 + (-5)^2 + (-5)^2 + 1^2 + (-2)^2 + 5^2}{10} = \frac{160}{10} = 16$$

となる。標準偏差は「分散の正の平方根（ $\sqrt{\quad}$ ）をとった値」なので、

$$\sqrt{16} = 4$$

より、4 となる。

問題 6-8

問題 6-4 より、英語テストの点数の偏差は下記のようになることがわかっている。

	英語テスト偏差	漢字テスト偏差
A	3	2
B	2	-5
C	-4	5
D	1	-1
E	0	5
F	-3	-5
G	4	-5
H	-1	1
I	-5	-2
J	3	5

英語テストの点数の偏差と漢字テストの点数の偏差

英語テストについて、分散（偏差の 2 乗の平均値）を計算すると、

$$\frac{3^2 + 2^2 + (-4)^2 + 1^2 + 0^2 + (-3)^2 + 4^2 + (-1)^2 + (-5)^2 + 3^2}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

となる。標準偏差は「分散の正の平方根（ $\sqrt{\quad}$ ）をとった値」なので、

$$\sqrt{9} = 3$$

より、3 となる。

問題 6-9

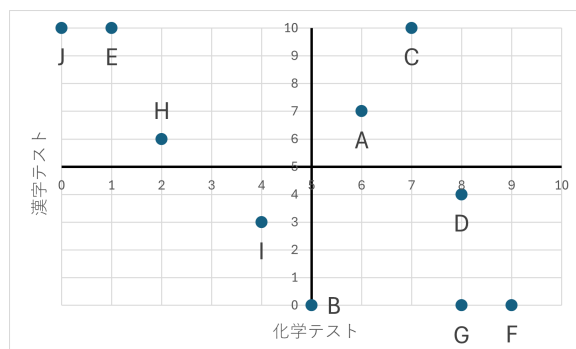
問題 6-8 より、英語テストの点数の標準偏差は 3 であり、問題 6-7 より、漢字テストの点数の標準偏差は 4 である。また、問題 6-6 より、英語テストの点数と漢字テストの点数の共分散は -0.6 であることがわかっている。よって、

$$\text{相関係数} = \frac{\text{共分散}}{\text{片方の標準偏差} \times \text{もう片方の標準偏差}} = \frac{-0.6}{3 \times 4} = -0.05$$

となり、求める相関係数は -0.05 であることがわかる。

問題 6-10

化学テストの点数を横軸とし漢字テストの点数を縦軸とする散布図は下記のようになる。ここで、横軸における縦軸との交点を「化学テストの点数の平均値 5」とし、縦軸における横軸との交点を「漢字テストの点数の平均値 5」としている。



化学テストの点数を横軸とし漢字テストの点数を縦軸とする散布図

A, B, C, D, E, F, G, H, I, J の順にそれぞれ偏差を計算すると、化学テストの点数については

$$6 - 5, 5 - 5, 7 - 5, 8 - 5, 1 - 5, 9 - 5, 8 - 5, 2 - 5, 4 - 5, 0 - 5$$

つまり、1, 0, 2, 3, -4, 4, 3, -3, -1, -5 となる。漢字テストの点数については 2, -5, 5, -1, 5, -5, -5, 1, -2, 5 となることがわかっている（例題 6-1）。

	化学テスト偏差	漢字テスト偏差
A	1	2
B	0	-5
C	2	5
D	3	-1
E	-4	5
F	4	-5
G	3	-5
H	-3	1
I	-1	-2
J	-5	5

化学テストの点数の偏差と漢字テストの点数の偏差

各点について、「化学テストの偏差 × 漢字テストの偏差」の値を順に計算すると、

$$1 \times 2, 0 \times (-5), 2 \times 5, 3 \times (-1), (-4) \times 5,$$

$$4 \times (-5), 3 \times (-5), (-3) \times 1, (-1) \times (-2), (-5) \times 5$$

つまり、2, 0, 10, -3, -20, -20, -15, -3, 2, -25 となる。

化学テストの点数と漢字テストの点数の共分散は、「化学テストの偏差 × 漢字テストの偏差」の平均値なので、

$$\frac{2 + 0 + 10 + (-3) + (-20) + (-20) + (-15) + (-3) + 2 + (-25)}{10} = \frac{-72}{10} = -7.2$$

より、-7.2 となる。

つぎに、化学テストについて、分散（偏差の 2 乗の平均値）を計算すると、

$$\frac{1^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2 + (-4)^2 + 4^2 + 3^2 + (-3)^2 + (-1)^2 + (-5)^2}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

となる。標準偏差は「分散の正の平方根（ $\sqrt{\quad}$ ）をとった値」なので、

$$\sqrt{9} = 3$$

より、3 となる。

また、問題 6-7 より、漢字テストの点数の標準偏差は 4 であることがわかっている。よって、

$$\text{相関係数} = \frac{\text{共分散}}{\text{片方の標準偏差} \times \text{もう片方の標準偏差}} = \frac{-7.2}{3 \times 4} = -0.6$$

となり、求める相関係数は -0.6 であることがわかる。

6.3 相関関係と因果関係

問題 6-11

「収入が高いと血圧も高い」（年齢が交絡要因である可能性が考えられる）

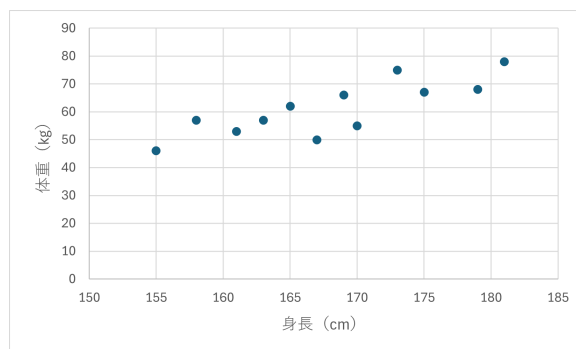
「各国においてチョコレートの消費量が多いとノーベル賞受賞者も多い」（経済状況が交絡要因である可能性が考えられる）

6.4 Excel による演習

問題 6-12

データをセル範囲 A1:C13 に入力し、「身長」と「体重」の 2 列分（B1:C13）を選択して、挿入タブの（グラフグループにある）「散布図 (X,Y) またはバブルチャートの挿入」の「散布図」を選ぶ。

作成したグラフを選択した状態で、グラフのデザインタブの（グラフのレイアウトグループにある）「グラフ要素の追加」をクリックし、「軸ラベル」の「第 1 横軸」を選択すると（横）軸ラベルが出てくる。（横）軸ラベルに「身長 (cm)」と入力する。同様に、（縦）軸ラベルも出し、「体重 (kg)」と入力する。グラフタイトルは Delete キーまたは BackSpace キーで削除する。



問題 6-13

問題 6-12 のファイルを開き、空いているセルに「=CORREL(」と入力し、「身長」のデータが入力されているセル範囲（B2:B13）をドラッグして選択したあと、Ctrl キーを押しながら、「体重」のデータが入力されているセル範囲（C2:C13）をドラッグして選択する。そして、Enter キーを押すと相関係数の値約 0.82 が計算される（セルには「=CORREL(B2:B13,C2:C13)」と入力されていることが確認できる）。

第7章 ベクトルの演算

7.1 ベクトルと行列

問題 7-1

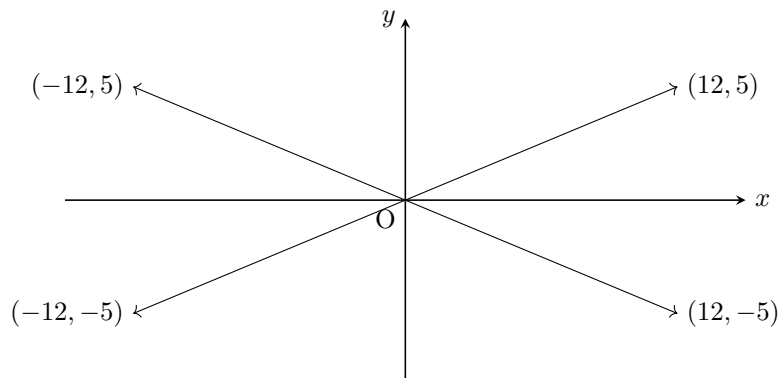
2次元ベクトルの例

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3次元ベクトルの例

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

問題 7-2



問題 7-3

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \text{の大きさは } \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13, \quad \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix} \text{の大きさは } \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13,$$
$$\begin{pmatrix} -12 \\ -5 \end{pmatrix} \text{の大きさは } \sqrt{(-12)^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13, \quad \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} \text{の大きさは } \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$$

問題 7-4

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

問題 7-5

(1) 3行4列

(2) 3 行 5 列

(3) 2 行 4 列

(4) 1 行 6 列

問題 7-6

(1) 5

(2) 2

(3) -2

(4) 8

7.2 ベクトルの和とスカラー倍

問題 7-7

(1) $\begin{pmatrix} 11 \\ 22 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 23 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 7 \\ -9 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$

問題 7-8

(1) $\begin{pmatrix} 18 \\ 36 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} -110 \\ 25 \\ -70 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

問題 7-9

(1) $(24a - 18b) - (11a - 31b) = 24a - 18b - 11a + 31b = 13a + 13b = 13(a + b)$

$$= 13 \left(\begin{pmatrix} 91 \\ 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -81 \\ 76 \end{pmatrix} \right) = 13 \begin{pmatrix} 10 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 1300 \end{pmatrix}$$

$$(2) 7(2a + 5b) - 5(3a + 7b) = 14a + 35b - 15a - 35b = -a = - \begin{pmatrix} 91 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -91 \\ -24 \end{pmatrix}$$

7.3 ベクトルの内積

問題 7-10

$$(1) 5 \times 4 + 10 \times 2 = 40$$

$$(2) 3 \times (-6) + 6 \times 3 = 0$$

$$(3) -3 \times 9 + 4 \times 6 + (-2) \times (-2) = 1$$

$$(4) \frac{1}{10} (5 \times (-9) + 3 \times 5) = \frac{1}{10} \times (-30) = -3$$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = 1 \times 4 + 0 \times 4 + (-1) \times 10 = -6$$

問題 7-11

たとえば,

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \times 7 + (-7) \times 3 = 0$$

となることが確認できるので, $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ は求めるベクトルであることがわかる. ほかに, $\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \end{pmatrix}$ などでもいい.

問題 7-12

たとえば,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$$

となることが確認できるので, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は互いに直交する 2 つの 2 次元ベクトルの組の例であるということができる.

7.4 Excel による演習

問題 7-13

たとえば, 下記のように求めることができる.

ここで, セル E2 には「=A2+C2」と入力し, これをセル E4 までオートフィルしている.

セル G2 には「=A2-C2」と入力し, これをセル G4 までオートフィルしている.

セル I2 には「 $=3*A2-6*C2$ 」と入力し、これをセル I4 までオートフィルしている。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	a		b		a+b		a-b		3a-6b			
2	54		-73		-19		127		600			
3	38		-51		-13		89		420			
4	-12		24		12		-36		-180			
5												
6												

問題 7-14

たとえば、下記のように求めることができる。

ここで、セル E2 には「 $=A2*C2+A3*C3+A4*C4$ 」と入力している。

セル G2 には「 $=A2^2+A3^2+A4^2$ 」と入力している。

セル I2 には「 $=C2^2+C3^2+C4^2$ 」と入力している。

セル K2 には「 $=G2^{(1/2)}$ 」と入力している。

セル M2 には「 $=I2^{(1/2)}$ 」と入力している。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	a		b		a・b		a・a		b・b		aの大きさ		bの大きさ		
2	54		-73		-6168		4504		8506		67.11185		92.22798		
3	38		-51												
4	-12		24												
5															
6															

第 8 章 行列の演算

8.1 行列の和とスカラー倍

問題 8-1

$$(1) \begin{pmatrix} 3+1 & -1+(-2) \\ -5+8 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 8+2 & -1+(-2) & 9+3 & 3+(-3) \\ 1+4 & -7+0 & 3+10 & 0+(-1) \\ -6+6 & 1+8 & 5+0 & 4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -3 & 12 & 0 \\ 5 & -7 & 13 & -1 \\ 0 & 9 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

問題 8-2

$$3 \text{ 行 } 2 \text{ 列のゼロ行列は, } O_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ である.}$$

$$\text{また, } 1 \text{ 行 } 3 \text{ 列のゼロ行列は, } O_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ である.}$$

問題 8-3

$$(1) \begin{pmatrix} 70 & -50 \\ -20 & 110 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 - (-7) & -50 - (-8) \\ -20 - 8 & 110 - 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 77 & -42 \\ -28 & 97 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} 0 & -18 \\ 6 & 12 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -18 \\ 6 & 12 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 & -18 - (-18) \\ 6 - 6 & 12 - 12 \\ -6 - (-6) & 0 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 8-4

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 9 & -3 \\ -4 & 10 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 0+9 & -1+(-3) \\ 0+(-4) & 1+10 & 0+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -4 \\ -4 & 11 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) 2 \begin{pmatrix} 2 & 9 & -3 \\ -4 & 10 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 & 2 \times 9 & 2 \times (-3) \\ 2 \times (-4) & 2 \times 10 & 2 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 18 & -6 \\ -8 & 20 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 9 & -3 \\ -4 & 10 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 0-9 & -1-(-3) \\ 0-(-4) & 1-10 & 0-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 2 \\ 4 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 18 & -6 \\ -8 & 20 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-4 & 0-18 & -(-1)-(-6) \\ 0-(-8) & -1-20 & 0-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -18 & 7 \\ 8 & -21 & 2 \end{pmatrix}$$

8.2 行列の積

問題 8-5

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 6 \\ 3 \times 5 + 4 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 39 \end{pmatrix}$$

問題 8-6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 8 + 3 \times 9 \\ 4 \times 7 + 5 \times 8 + 6 \times 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}$$

問題 8-7

- (1) は (2, 3) 行列と (2, 1) 行列の積,
- (2) は (2, 3) 行列と (3, 1) 行列の積,
- (3) は (3, 4) 行列と (3, 1) 行列の積,
- (4) は (3, 2) 行列と (2, 1) 行列の積,
- (5) は (3, 2) 行列と (3, 1) 行列の積,
- (6) は (3, 4) 行列と (4, 1) 行列の積

である. このうち, 行列の積が定義されないものは, 左の行列の列数と右の行列の行数が一致しないものなので, (1), (3), (5) である.

問題 8-8

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 11 + 3 \times 21 & 1 \times 12 + 3 \times 22 \\ 2 \times 11 + 4 \times 21 & 2 \times 12 + 4 \times 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 74 & 78 \\ 106 & 112 \end{pmatrix}$$

問題 8-9

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 11 + 0 \times 21 & 1 \times 12 + 0 \times 22 \\ 0 \times 11 + 1 \times 21 & 0 \times 12 + 1 \times 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix}$$

問題 8-10

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 11 + 0 \times 21 & 0 \times 12 + 0 \times 22 \\ 0 \times 11 + 0 \times 21 & 0 \times 12 + 0 \times 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 8-11

$$\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \times 1 + (-7) \times 0 \\ 2 \times 1 + (-9) \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2) 行列に単位行列をかけても不変なので,

$$\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$$

なお, 計算してみても

$$\begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \times 1 + (-7) \times 0 & 1 \times 0 + (-7) \times 1 \\ 2 \times 1 + (-9) \times 0 & 2 \times 0 + (-9) \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}$$

であることが確認できる.

$$(3) \begin{pmatrix} -4 & 9 & 6 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \times 10 + 9 \times 20 + 6 \times 30 \\ 3 \times 10 + 0 \times 20 + (-1) \times 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} -4 & 9 & 6 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 100 \\ 20 & 200 \\ 30 & 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \times 10 + 9 \times 20 + 6 \times 30 & -4 \times 100 + 9 \times 200 + 6 \times 300 \\ 3 \times 10 + 0 \times 20 + (-1) \times 30 & 3 \times 100 + 0 \times 200 + (-1) \times 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 320 & 3200 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 8-12

$$(1) \begin{pmatrix} -10 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = -10 \times 1 + 2 \times (-4) = -18$$

((1, 2) 型 \times (2, 1) 型 = (1, 1) 型)

$$(2) \begin{pmatrix} 4 & -5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 4 \times 1 + (-5) \times (-2) + (-8) \times (-1) = 22$$

((1, 3) 型 \times (3, 1) 型 = (1, 1) 型)

$$(3) \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \times 3 & 7 \times 0 \\ -1 \times 3 & (-1) \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

((2, 1) 型 \times (1, 2) 型 = (2, 2) 型)

$$(4) \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 9 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{積は定義されない.}$$

((2, 1) 行列と (2, 3) 行列の積は定義されない)

$$(5) \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{積は定義されない.}$$

((3, 1) 行列と (2, 2) 行列の積は定義されない)

(6) 行列に単位行列をかけても不変なので,

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(7) 行列に単位行列をかけても不変なので,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (8) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 積は定義されない.
 ((2,3) 行列と (2,2) 行列の積は定義されない)

8.3 Excel による演習

問題 8-13

たとえば, 下記のように求めることができる.

ここで, セル G2 に「=A2+D2」と入力し, これをオートフィルしている.

セル J2 に「=A2-D2」と入力し, これをオートフィルしている.

セル M2 に「=3*A2-6*D2」と入力し, これをオートフィルしている.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	A			B			A+B			A-B			3A-6B				
2		54	93	-73	52		-19	145		127	41		600	-33			
3		38	-58	-51	-29		-13	-87		89	-29		420	0			
4		-12	52	24	40		12	92		-36	12		-180	-84			
5																	
6																	

問題 8-14

たとえば, 下記のように求めることができる.

ここで, セル G2 には「=MMULT(A2:B3,D2:E3)」と入力している.

セル J2 には「=MMULT(D2:E3,A2:B3)」と入力している.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	A			B			AB			BA				
2		54	93	-73	52		-8685	111		-1966	-9805			
3		38	-58	-51	-29		184	3658		-3856	-3061			
4														
5														

問題 8-15

たとえば, 下記のように入力する.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	(1)	3		-4	-31	8	2				
2		54									
3		36									
4		1									
5											
6	(2)										
7											
8	(3)	50	-31	89	43		4				
9		87	29	53	-93		6				
10							-21				
11							-9				
12											
13	(4)						4	11			
14							6	-3			
15							-21	0			
16							-9	88			
17											

(1) セル J1 に「=MMULT(B1:B4,D1:G1)」と入力すると、求める積 $\begin{pmatrix} -12 & -93 & 24 & 6 \\ -216 & -1674 & 432 & 108 \\ -144 & -1116 & 288 & 72 \\ -4 & -31 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ が計算される。

(2) セル J6 に「=MMULT(D1:G1,B1:B4)」と入力すると、求める積 (-1396) が計算される。

(3) セル J8 に「=MMULT(B8:E9,G8:G11)」と入力すると、求める積 $\begin{pmatrix} -2242 \\ 246 \end{pmatrix}$ が計算される。

(4) セル J13 に「=MMULT(B8:E9,G13:H16)」と入力すると、求める積 $\begin{pmatrix} -2242 & 4427 \\ 246 & -7314 \end{pmatrix}$ が計算される。

第 9 章 多項式関数

9.1 多項式関数とは

問題 9-1

(1) $f(300) = 1000 - 300 = 700$

(2) $f(0) = 1000 - 0 = 1000$

(3) $f(1000) = 1000 - 1000 = 0$

問題 9-2

半径の長さが x の円の周囲の長さを y とすると,

$$y = 2\pi x$$

とあらわすことができる. この式において, $x \geq 0$ の範囲での x を決めると, それに対応して, y の値がひとつに定まるので, y は x の関数である. 定義域は集合 $\{x \mid x \geq 0\}$ である.

問題 9-3

(1) y は x の関数である. $y = 100x$ とあらわすことができる (定義域は集合 $\{0, 1, 2, \dots, 20\}$).

(2) y は x の関数である. $y = 100x + 1000$ とあらわすことができる (定義域は集合 $\{0, 1, 2, \dots, 20\}$).

(3) y は x の関数である. $y = x^2$ とあらわすことができる (定義域はすべての実数からなる集合).

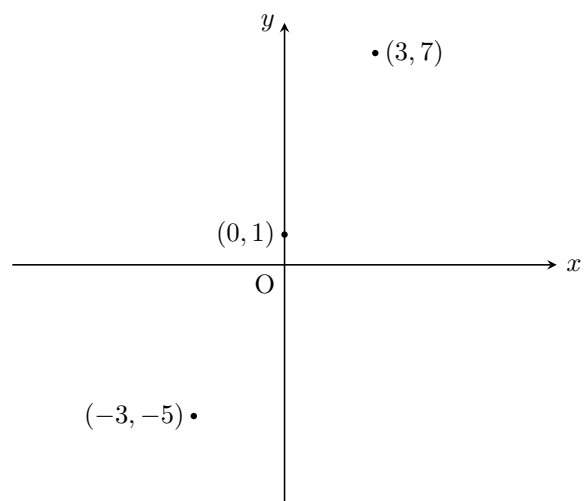
(4) y は x の関数ではない. たとえば, $3^2 = 9$ でもあるし, $(-3)^2 = 9$ でもある. ゆえに, 9 に対して, 9 の平方根 (2 個かけあわせると 9 になる数) はひとつに決まらない.

問題 9-4

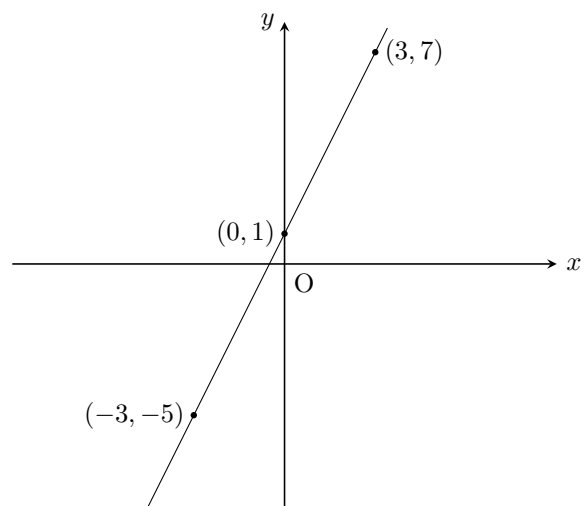
$f(x) = 2x + 1$ とおくと, たとえば,

$$f(-3) = 2 \times (-3) + 1 = -5, \quad f(0) = 2 \times 0 + 1 = 1, \quad f(3) = 7$$

となる. xy 座標平面上に点 $(-3, -5)$, 点 $(0, 1)$, 点 $(3, 7)$ を表示してみると, 下図のようになる.



x はどんな実数でもとりうるので、これらの点を線で結ぼう。



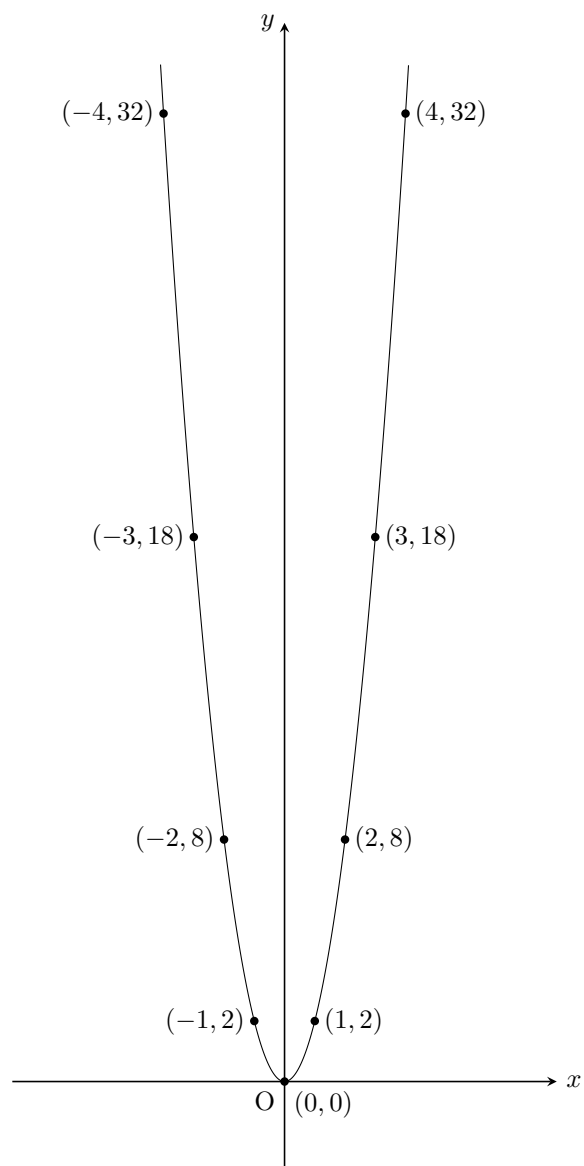
問題 9-5

$f(x) = 2x^2$ ($= 2 \times x \times x$) とおくと、たとえば、

$$f(-4) = 32, \quad f(-3) = 18, \quad f(-2) = 8, \quad f(-1) = 2, \quad f(0) = 0,$$

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 8, \quad f(3) = 18, \quad f(4) = 32$$

となるので、グラフは下記のようなになる。



9.2 1 次関数のグラフ

問題 9-6

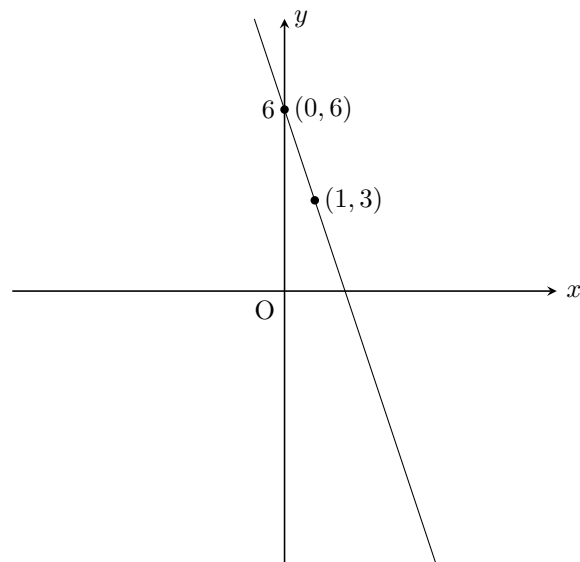
傾きは -3 , y 切片は -9 である.

問題 9-7

(1) 求める 1 次関数は, 傾きが -3 , y 切片が 6 なので, $y = -3x + 6$ である.

y 切片が 6 なので, 直線は点 $(0, 6)$ を通る. またたとえば, $x = 1$ のとき, $y = -3 \times 1 + 6 = 3$ である. これより, 直線は点 $(1, 3)$ を通ることがわかる.

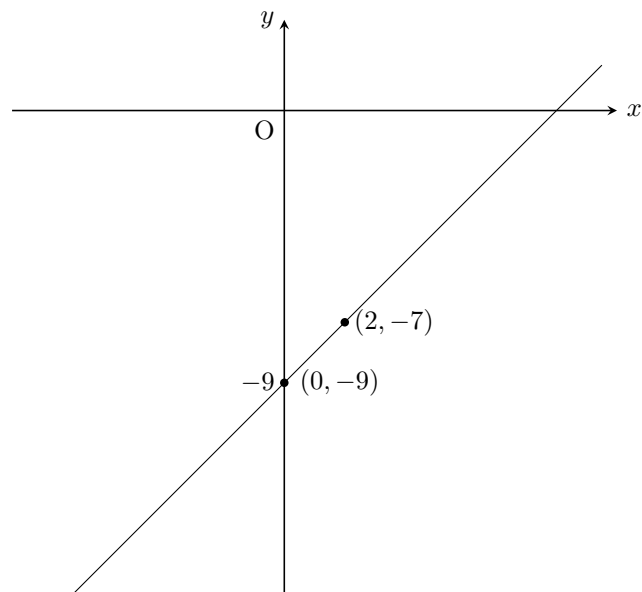
よって, グラフは下記のようなになる.



(2) 求める1次関数は、傾きが1なので、 $y = x + b$ とおける。直線は点 $(2, -7)$ を通るので、 $x = 2$ のとき $y = -7$ である。これを代入すると、 $-7 = 2 + b$ となり、これより、 $b = -9$ である。

つまり、求める1次関数は $y = x - 9$ であることがわかる。

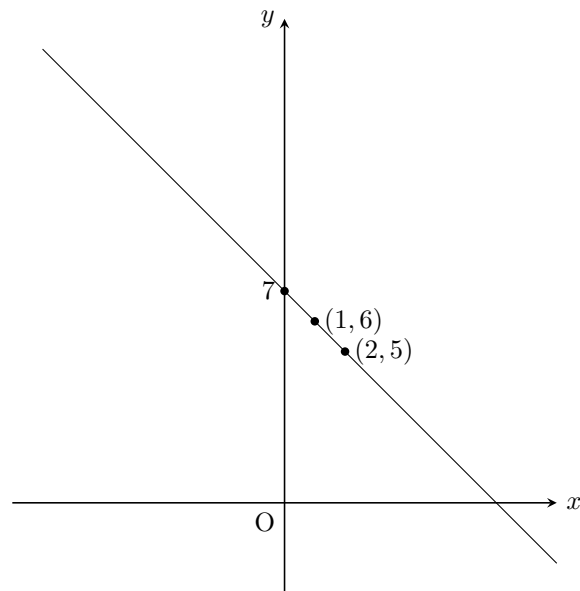
y 切片が -9 なので、直線は点 $(0, -9)$ を通る。さらに点 $(2, -7)$ を通ることから、グラフは下記のようになる。



(3) 求める1次関数を $y = ax + b$ とおく。直線は点 $(1, 6)$ を通るので、 $x = 1$ のとき $y = 6$ である。これを代入すると、 $6 = a + b$ となるので、 $b = 6 - a$ となる。また、直線は点 $(2, 5)$ を通るので、 $x = 2$ のとき $y = 5$ である。これを $y = ax + b$ に代入すると、 $5 = 2a + b$ となる。これに $b = 6 - a$ を代入すると、 $5 = 2a + 6 - a$ となるので、 $a = -1$ であることがわかる。これを $b = 6 - a$ に代入すると、 $b = 6 - (-1) = 7$ であることもわかる。

つまり、求める1次関数は $y = -x + 7$ である。

直線は点 $(0, 7)$ 、点 $(1, 6)$ 、点 $(2, 5)$ を通ることから、グラフは下記のようになる。



問題 9-8

(1) 問題の直線があらわす 1 次関数は、傾きが -11 なので、 $y = -11x + b$ とおける。直線は点 $(2, -21)$ を通るので、 $x = 2$ のとき $y = -21$ である。これを代入すると、 $-21 = -11 \times 2 + b$ となり、これより、 $b = 1$ である。

つまり、問題の直線があらわす 1 次関数は $y = -11x + 1$ であることがわかる。 y 切片が 1 ということなので、求める y 軸との交点の座標は $(0, 1)$ である。

(2) 問題の 1 次関数を $y = ax + b$ とおく。直線は点 $(-2, -3)$ を通るので、 $x = -2$ のとき $y = -3$ である。これを代入すると、 $-3 = -2a + b$ となるので、 $b = 2a - 3$ となる。また、直線は点 $(2, 13)$ を通るので、 $x = 2$ のとき $y = 13$ である。これを $y = ax + b$ に代入すると、 $13 = 2a + b$ となる。これに $b = 2a - 3$ を代入すると、 $13 = 2a + 2a - 3$ となるので、 $a = 4$ であることがわかる。これを $b = 2a - 3$ に代入すると、 $b = 2 \times 4 - 3 = 5$ であることもわかる。

つまり、問題の 1 次関数は $y = 4x + 5$ となり、 $x = 1$ のとき $y = 4 + 5 = 9$ である。

(3) 問題の直線があらわす 1 次関数は、傾きが 1 なので、 $y = x + b$ とおける。直線は点 $(2, 4)$ を通るので、 $x = 2$ のとき $y = 4$ である。これを代入すると、 $4 = 2 + b$ となり、これより、 $b = 2$ である。

つまり、問題の直線があらわす 1 次関数は $y = x + 2$ であることがわかる。直線と x 軸との交点の y 座標は 0 なので、 $y = 0$ を代入すると、 $0 = x + 2$ となる。これより、 $x = -2$ となるので、求める座標は $(-2, 0)$ となる。

9.3 2 次関数のグラフ

問題 9-9

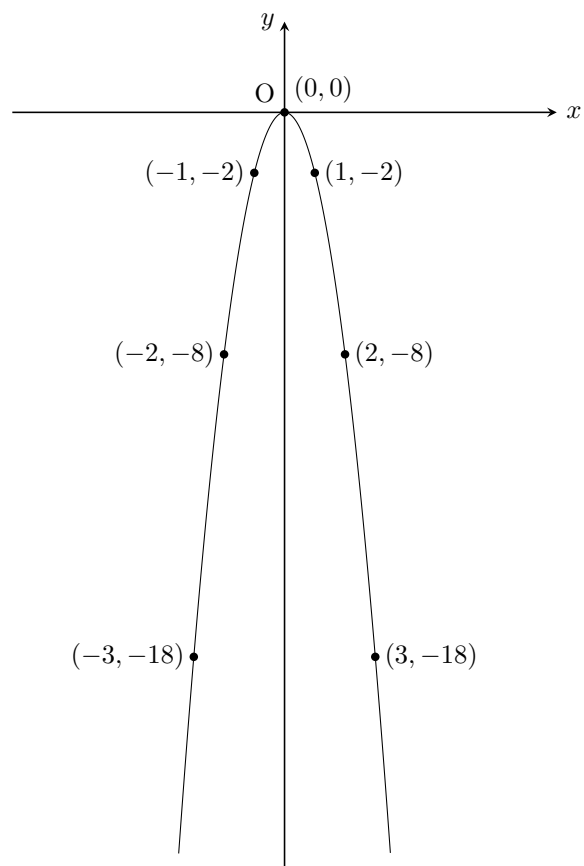
2 次関数 $y = -2x^2$ は $y = -2(x - 0)^2 + 0$ と変形できる。よって、そのグラフは頂点 $(0, 0)$ の放物線になる。また、これは上に凸な関数である。

$f(x) = -2x^2$ ($= -2 \times x \times x$) とおくと、たとえば、

$$f(-3) = -18, \quad f(-2) = -8, \quad f(-1) = -2, \quad f(0) = 0,$$

$$f(1) = -2, f(2) = -8, f(3) = -18$$

となるので，グラフは下記のようなになる．



問題 9-10

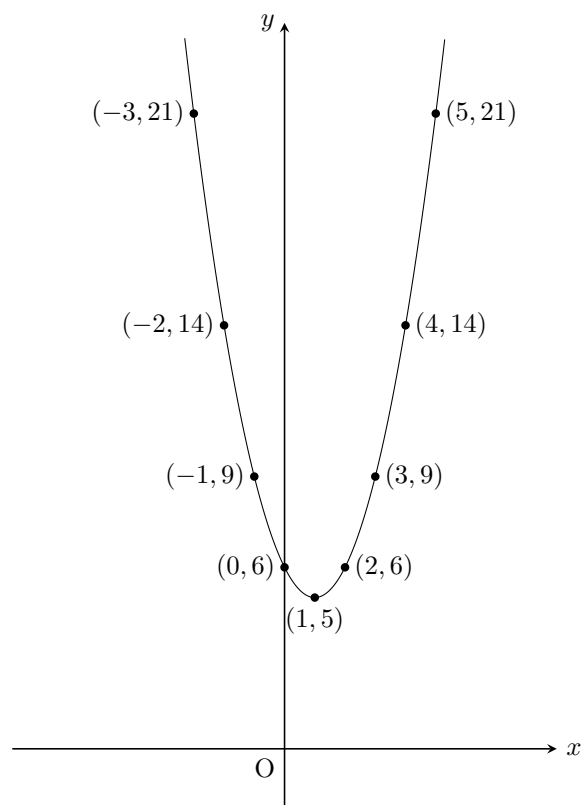
2 次関数 $y = x^2 - 2x + 6$ は $y = (x - 1)^2 - 1 + 6 = (x - 1)^2 + 5$ と変形できる． よって， そのグラフは頂点 $(1, 5)$ の放物線になり， 2 次関数 $y = x^2$ のグラフを x 軸方向に（横に）1 だけ， y 軸方向に（縦に）5 だけ平行移動させたものである． また， これは下に凸な関数である．

$f(x) = x^2 - 2x + 6$ とおくと， たとえば，

$$f(-3) = 21, f(-2) = 14, f(-1) = 9, f(0) = 6,$$

$$f(1) = 5, f(2) = 6, f(3) = 9, f(4) = 14, f(5) = 21$$

となるので， グラフは下記のようなになる．



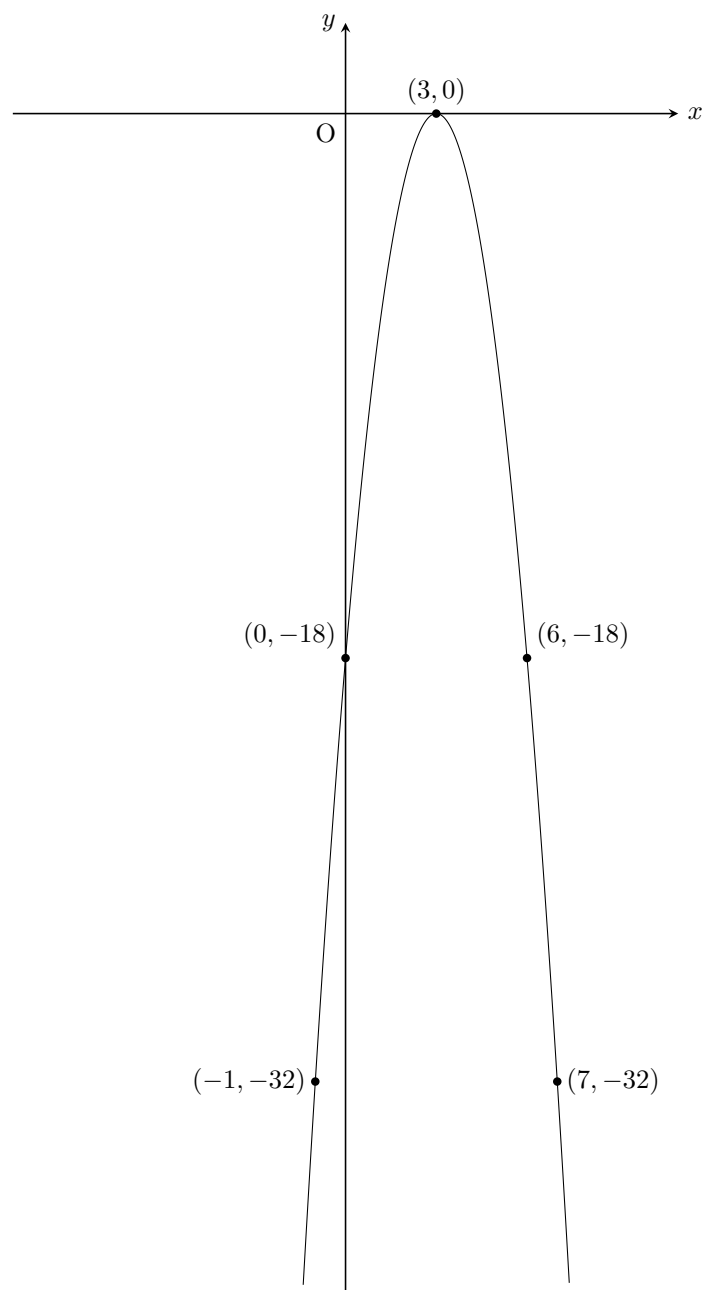
問題 9-11

2 次関数 $y = -2x^2 + 12x - 18$ は $y = -2(x^2 - 6x) - 18 = -2((x - 3)^2 - 9) - 18 = -2(x - 3)^2 + 18 - 18 = -2(x - 3)^2 + 0$ と変形できる． よって， そのグラフは頂点 $(3, 0)$ の放物線になり， 2 次関数 $y = -2x^2$ のグラフを x 軸方向に（横に）3 だけ平行移動させたものである． また， これは上に凸な関数である．

$f(x) = -2x^2 + 12x - 18$ とおくと， たとえば，

$$f(-1) = -32, \quad f(0) = -18, \quad f(3) = 0, \quad f(6) = -18, \quad f(7) = -32$$

となるので， グラフは下記のようなになる．



問題 9-12

求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおくと、このグラフが点 $(-1, 2)$, $(0, 1)$, $(1, -4)$ の 3 点を通ることから、

$$\begin{cases} 2 = a - b + c \\ 1 = c \\ -4 = a + b + c \end{cases}$$

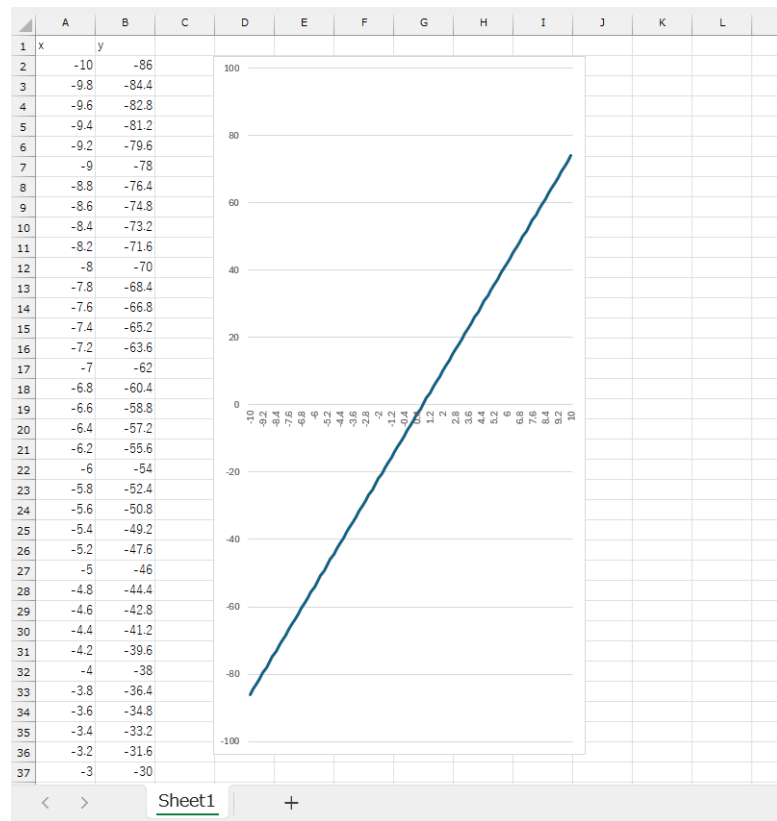
となる。この連立方程式を解くと、 $a = -2$, $b = -3$, $c = 1$ となる。

よって、求める 2 次関数は $y = -2x^2 - 3x + 1$ であることがわかる。

9.4 Excel による演習

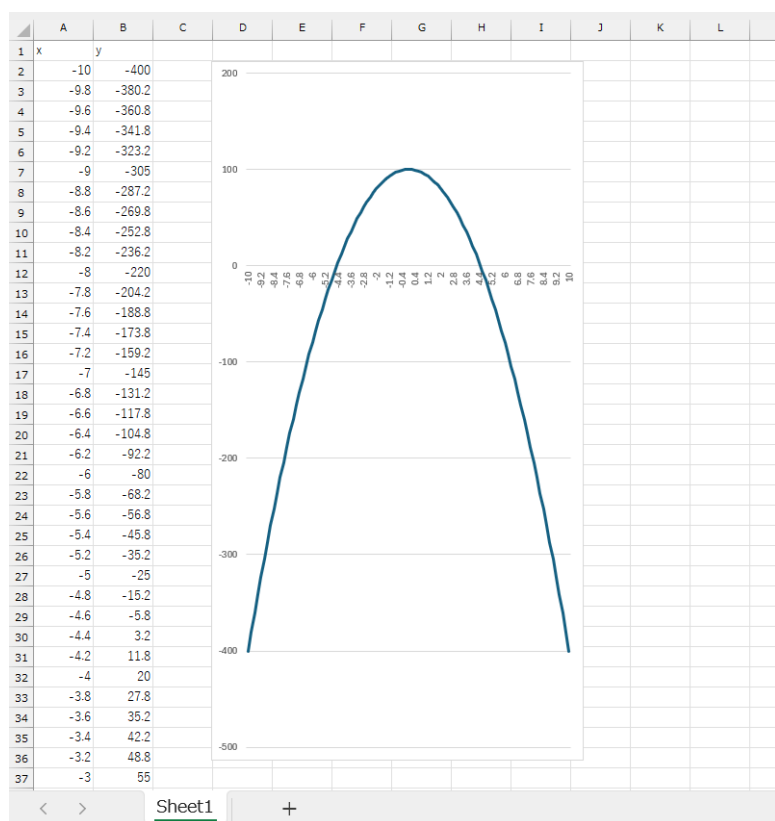
問題 9-13

例題 9-13 のファイルにおいて、セル B2 を「 $=8*A2-6$ 」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。



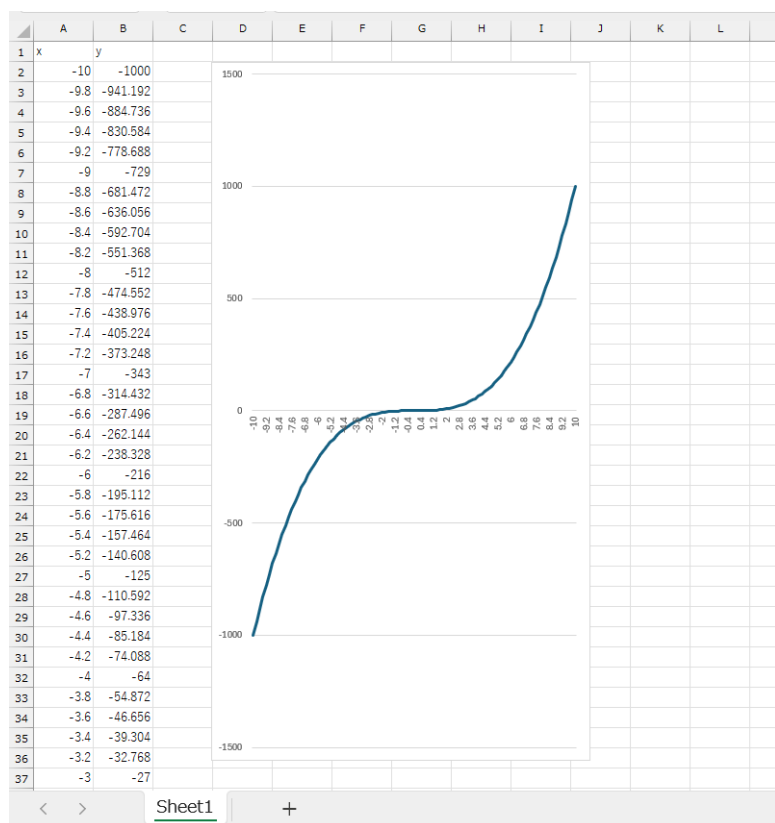
問題 9-14

上の例題または問題のファイルにおいて、セル B2 を「 $=5*A2^2+100$ 」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。



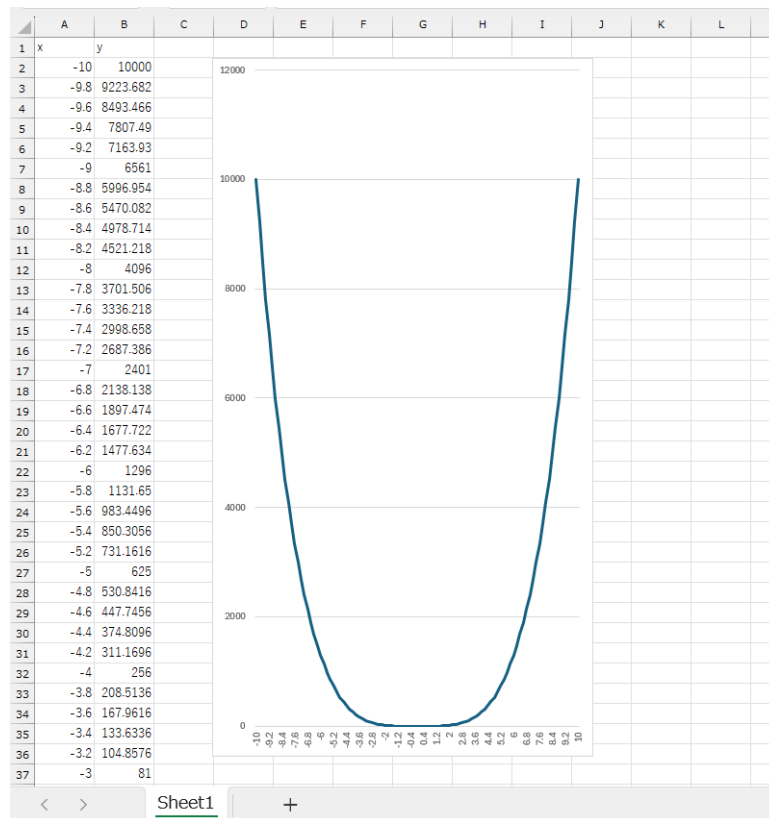
問題 9-15

上の例題または問題のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^3」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。



問題 9-16

上の例題または問題のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^4」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。



第 10 章 指数関数

10.1 指数の意味

問題 10-1

(1) 2^5

(2) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$

(3) $\sqrt{2}^2$

問題 10-2

(1) $2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

(2) $2^3 \times 2^2 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2) = 32$

(3) $\frac{2^7}{2^3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{1} = 16$

(4) $(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 64$

(5) $2^{(3 \times 2)} = 2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

(6) $(2 \times 3)^4 = 6^4 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$

(7) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{16}{81}$

(8) $\sqrt{3}^2 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$

問題 10-3

$$10^{-3} = \frac{1}{1000} \quad \left(= \frac{1}{10^3}\right)$$

$$\downarrow \quad \boxed{\frac{1}{10} \text{ 倍}}$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10000} \quad \left(= \frac{1}{10^4}\right)$$

$$\downarrow \quad \boxed{\frac{1}{10} \text{ 倍}}$$

$$10^{-5} = \frac{1}{100000} \quad \left(= \frac{1}{10^5}\right)$$

問題 10-4

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

$$\downarrow \quad \boxed{\frac{1}{2} \text{ 倍}}$$

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

$$\begin{aligned} &\downarrow \boxed{\frac{1}{2} \text{ 倍}} \\ 2^3 &= 2 \times 2 \times 2 = 8 \\ &\downarrow \boxed{\frac{1}{2} \text{ 倍}} \\ 2^2 &= 2 \times 2 = 4 \\ &\downarrow \boxed{\frac{1}{2} \text{ 倍}} \\ 2^1 &= 2 \end{aligned}$$

というように、かけあわせる 2 の個数を減らしていくと、それぞれ順に $\frac{1}{2}$ 倍になっていく。この規則をあてはめ自然に拡張すると、

$$\begin{aligned} &\downarrow \boxed{\frac{1}{2} \text{ 倍}} \\ 2^0 &= 1 \\ &\downarrow \boxed{\frac{1}{2} \text{ 倍}} \\ 2^{-1} &= \frac{1}{2} \quad \left(= \frac{1}{2^1} \right) \\ &\downarrow \boxed{\frac{1}{2} \text{ 倍}} \\ 2^{-2} &= \frac{1}{4} \quad \left(= \frac{1}{2^2} \right) \\ &\downarrow \boxed{\frac{1}{2} \text{ 倍}} \\ 2^{-3} &= \frac{1}{8} \quad \left(= \frac{1}{2^3} \right) \\ &\downarrow \boxed{\frac{1}{2} \text{ 倍}} \\ 2^{-4} &= \frac{1}{16} \quad \left(= \frac{1}{2^4} \right) \\ &\downarrow \boxed{\frac{1}{2} \text{ 倍}} \\ 2^{-5} &= \frac{1}{32} \quad \left(= \frac{1}{2^5} \right) \end{aligned}$$

となっていく。

問題 10-5

$$(1) 3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{81}$$

$$(2) 9^{-1} = \frac{1}{9}$$

$$(3) \sqrt{11}^0 = 1$$

$$(4) \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{25}\right)} = 25$$

$$(5) \sqrt{7}^{-2} = \frac{1}{\sqrt{7}^2} = \frac{1}{7}$$

$$(6) \sqrt{3}^{-4} = \frac{1}{\sqrt{3}^4} = \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{9}$$

$$(7) \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{\left(\frac{3}{7}\right)^1} = \frac{1}{\left(\frac{3}{7}\right)} = \frac{7}{3}$$

$$(8) \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{1}{\left(\frac{8}{27}\right)} = \frac{27}{8}$$

問題 10-6

$$(1) (10^3)^{-2} = \frac{1}{(10^3)^2} = \frac{1}{10^3 \times 10^3} = \frac{1}{(10 \times 10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10)} = \frac{1}{1000000},$$

$$10^{3 \times (-2)} = 10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1000000}$$

となり, $(10^3)^{-2} = 10^{3 \times (-2)}$ であることがたしかめられた.

$$(2) (10^{-3})^{-2} = \frac{1}{(10^{-3})^2} = \frac{1}{10^{-3} \times 10^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{10^3} \times \frac{1}{10^3}} = \frac{1}{\frac{1}{10 \times 10 \times 10} \times \frac{1}{10 \times 10 \times 10}} = \frac{1}{\frac{1}{1000000}}$$

$$= 1000000,$$

$$10^{-3 \times (-2)} = 10^6 = 1000000$$

となり, $(10^{-3})^{-2} = 10^{-3 \times (-2)}$ であることがたしかめられた.

問題 10-7

$$(1) 36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = \sqrt{6 \times 6} = 6$$

$$(2) 27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3} = 3$$

$$(3) 100000^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{100000} = \sqrt[5]{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10} = 10$$

$$(4) \left(\frac{16}{49}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{16}{49}} = \sqrt{\frac{4}{7} \times \frac{4}{7}} = \frac{4}{7}$$

問題 10-8

$$(1) 25^{-\frac{1}{2}} = \left(25^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = (\sqrt{25})^{-1} = (\sqrt{5 \times 5})^{-1} = 5^{-1} = \frac{1}{5^1} = \frac{1}{5}$$

$$(2) 1000^{\frac{2}{3}} = \left(1000^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (\sqrt[3]{1000})^2 = (\sqrt[3]{10 \times 10 \times 10})^2 = 10^2 = 100$$

$$(3) 9^{\frac{3}{2}} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (\sqrt{9})^3 = (\sqrt{3 \times 3})^3 = 3^3 = 27$$

$$(4) 27^{-\frac{2}{3}} = \left(27^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} = (\sqrt[3]{27})^{-2} = (\sqrt[3]{3 \times 3 \times 3})^{-2} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$(5) 100000^{-\frac{2}{5}} = \left(100000^{\frac{1}{5}}\right)^{-2} = (\sqrt[5]{100000})^{-2} = (\sqrt[5]{10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10})^{-2}$$

$$= 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

$$(6) \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{8}}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$(7) \left(\frac{1}{10000}\right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\left(\frac{1}{10000}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{-1} = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{10000}}\right)^{-1} = \left(\sqrt[4]{\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)} = 10$$

$$(8) \left(\frac{8}{125}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(\left(\frac{8}{125}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-4} = \left(\sqrt[3]{\frac{8}{125}}\right)^{-4} = \left(\sqrt[3]{\frac{2}{5} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{5}}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^4} = \frac{1}{\left(\frac{16}{625}\right)} = \frac{625}{16}$$

問題 10-9

$$(1) 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = 5^2 = 25$$

$$(2) \frac{13^{\frac{5}{3}}}{13^{\frac{2}{3}}} = 13^{\frac{5}{3} - \frac{2}{3}} = 13^1 = 13$$

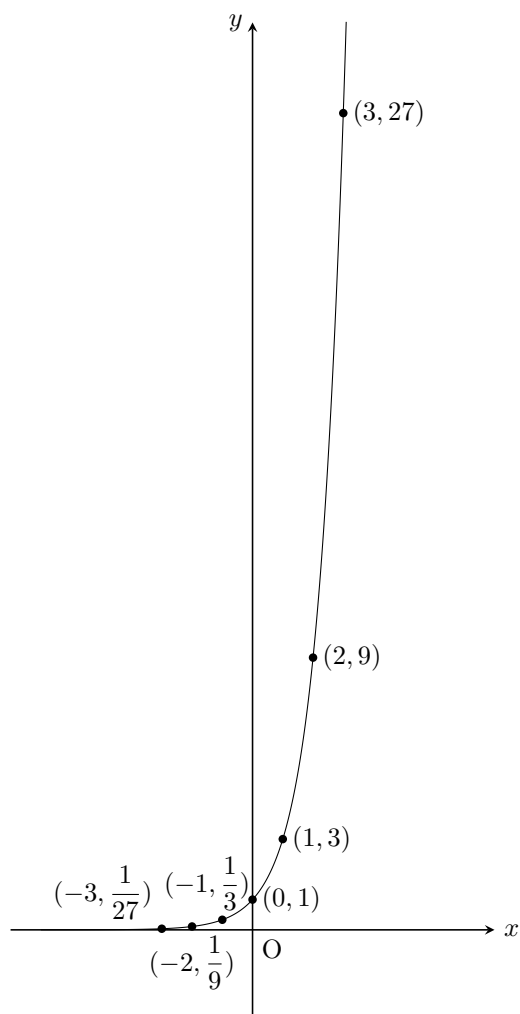
$$(3) \left(8^{\frac{2}{5}}\right)^5 = 8^{\frac{2}{5} \times 5} = 8^2 = 64$$

$$(4) \left(\frac{27}{1000}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{27^{\frac{1}{3}}}{1000^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{3}{10}$$

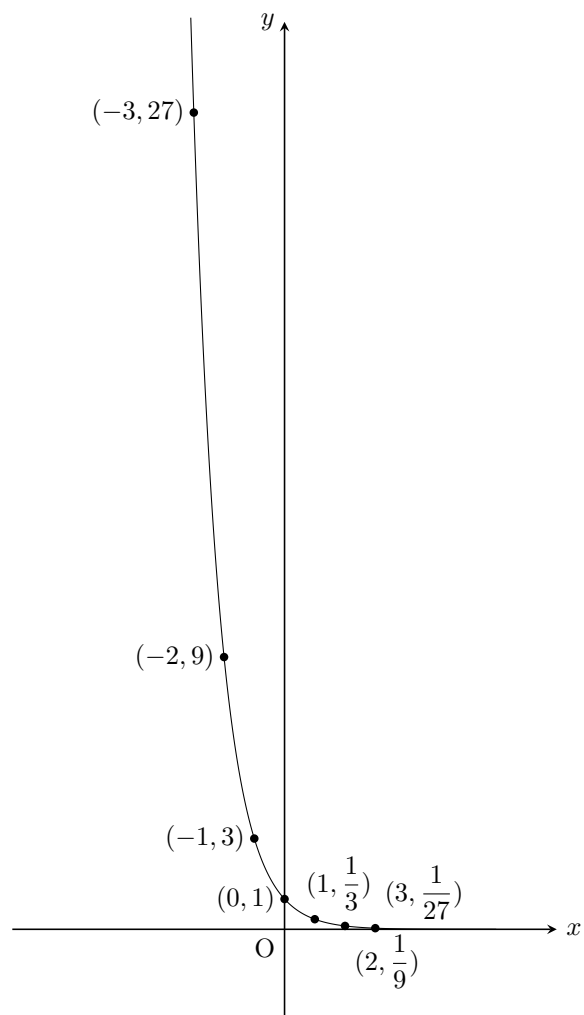
$$(5) (36 \times 81)^{\frac{1}{2}} = 36^{\frac{1}{2}} \times 81^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} \times \sqrt{81} = 6 \times 9 = 54$$

10.2 指数関数のグラフ

問題 10-10



問題 10-11



10.3 Excel による演習

問題 10-12

次のように入力すると,

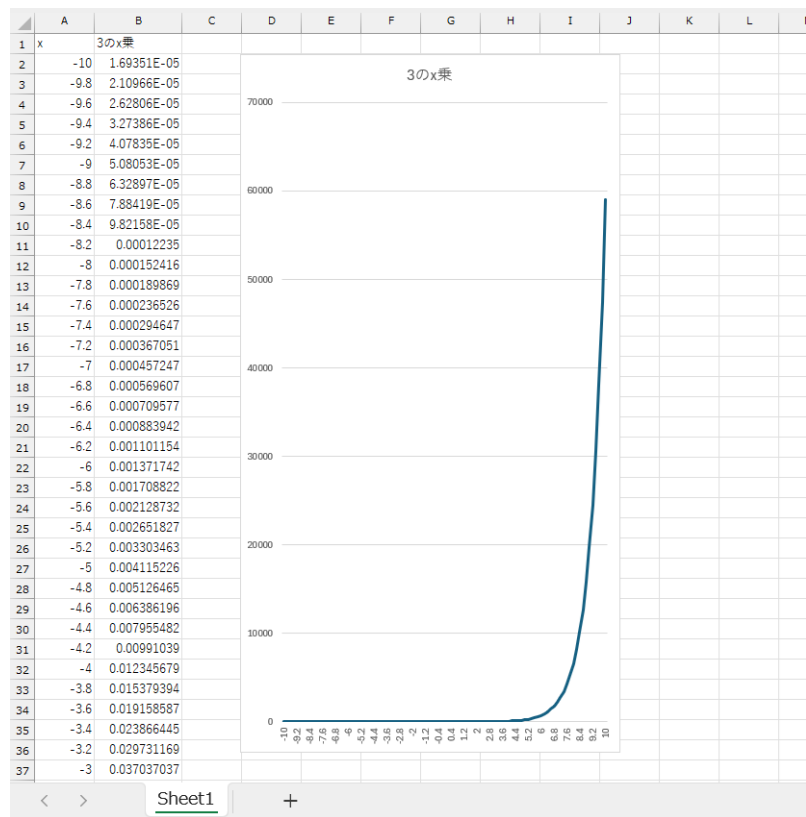
	A	B	C
1	=6^5		
2	=(1/49)^(-1)		
3	=2014^0		
4	=625^(1/2)		
5	=(1/1331)^(-1/3)		
6	=1000^(7/3)		
7	=(8/125)^(-2/3)		
8	=(361^(1/2))^3		
9			
10			

下記のような結果が得られる.

	A	B	C	D
1	7776			
2	49			
3	1			
4	25			
5	11			
6	10000000			
7	6.25			
8	6859			
9				
10				

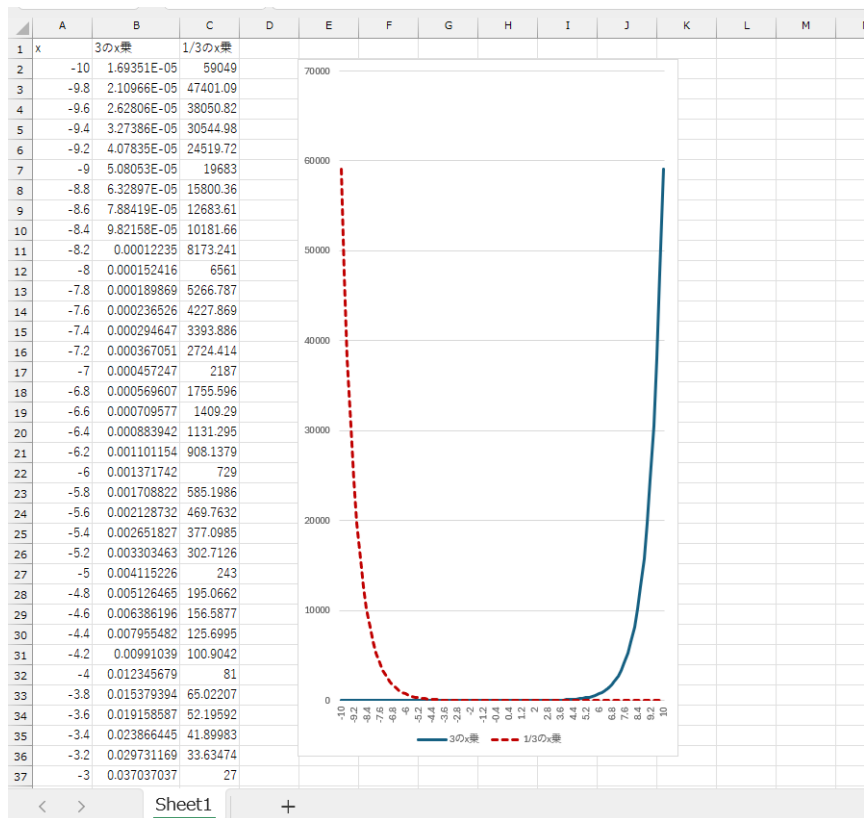
問題 10-13

例題 10-13 のファイルにおいて、セル B1 を「3 の x 乗」に入力しなおす。また、セル B2 を「 $=3^{\wedge}A2$ 」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。



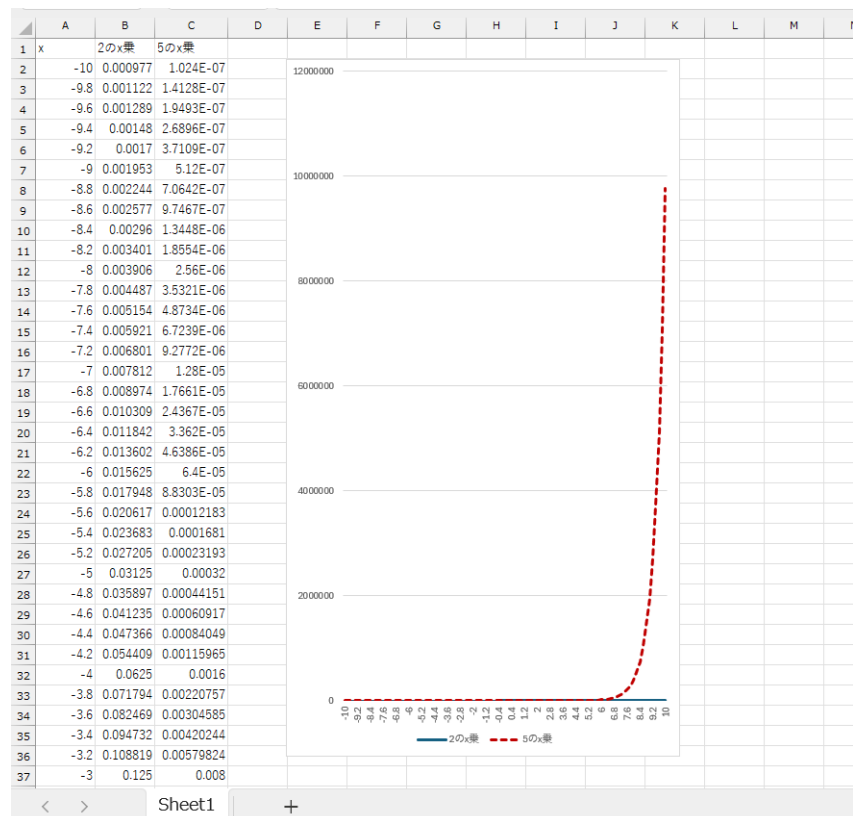
問題 10-14

例題 10-14 のファイルにおいて、セル B1 を「3 の x 乗」、セル C1 を「1/3 の x 乗」に入力しなおす。また、セル B2 を「 $=3^{\wedge}A2$ 」、セル C2 を「 $=(1/3)^{\wedge}A2$ 」に入力しなおし、これらを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。



問題 10-15

例題 10-14 または問題 10-14 のファイルにおいて、セル B1 を「2 の x 乗」、セル C1 を「5 の x 乗」に入力しなす。また、セル B2 を「 $=2^A2$ 」、セル C2 を「 $=5^A2$ 」に入力しなす、これらを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。



第 11 章 対数関数

11.1 対数の意味

問題 11-1

(1) $5 = \log_2 32$

(2) $3 = \log_{\frac{2}{5}} \frac{8}{125}$

(3) $2 = \log_{\sqrt{5}} 5$

問題 11-2

(1) $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

(2) $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$

(3) $\log_{10} 10^{19} = 19$

(4) $\log_5 625 = \log_5 5^4 = 4$

問題 11-3

(1) $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 \frac{1}{2^3} = \log_2 2^{-3} = -3$

(2) $\log_{100} 1 = \log_{100} 100^0 = 0$

(3) $\log_5 \frac{1}{5} = \log_5 5^{-1} = -1$

(4) $\log_{100} \frac{1}{10000} = \log_{100} \frac{1}{100^2} = \log_{100} 100^{-2} = -2$

問題 11-4

(1) $\log_{\frac{1}{12}} 12 = \log_{\frac{1}{12}} \left(\frac{1}{12} \right)^{-1} = -1$

(2) $\log_{\sqrt{2}} 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}^2 = 2$

(3) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^3 = 3$

(4) $\log_{\sqrt{3}} 9 = \log_{\sqrt{3}} (3 \times 3) = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3}^2 \times \sqrt{3}^2) = \log_{\sqrt{3}} \sqrt{3}^4 = 4$

問題 11-5

① 3, ② 4, ③ 3, ④ 2, ⑤ 2

問題 11-6

(1) $\log_{10} 6 = \log_{10} (2 \times 3) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.3010 + 0.4771 = 0.7781$

$$(2) \log_{10} 8 = \log_{10} 2^3 = 3 \times \log_{10} 2 = 3 \times 0.3010 = 0.9030$$

$$(3) \log_{10} 9 = \log_{10} 3^2 = 2 \times \log_{10} 3 = 2 \times 0.4771 = 0.9542$$

問題 11-7

$$(1) \log_3 6 + \log_3 \frac{27}{2} = \log_3 \left(6 \times \frac{27}{2} \right) = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$$

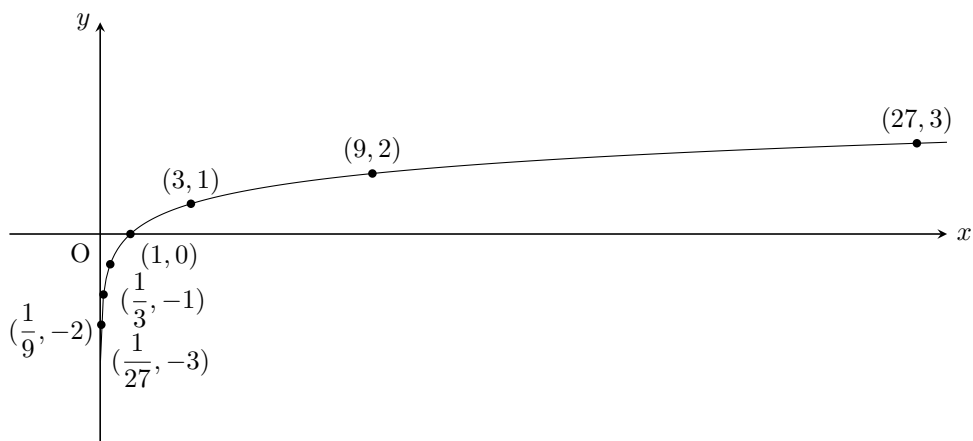
$$(2) \log_{10} 250 + \log_{10} 400 = \log_{10} (250 \times 400) = \log_{10} 100000 = \log_{10} 10^5 = 5$$

$$(3) \log_5 250 - \log_5 2 = \log_5 \frac{250}{2} = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$$

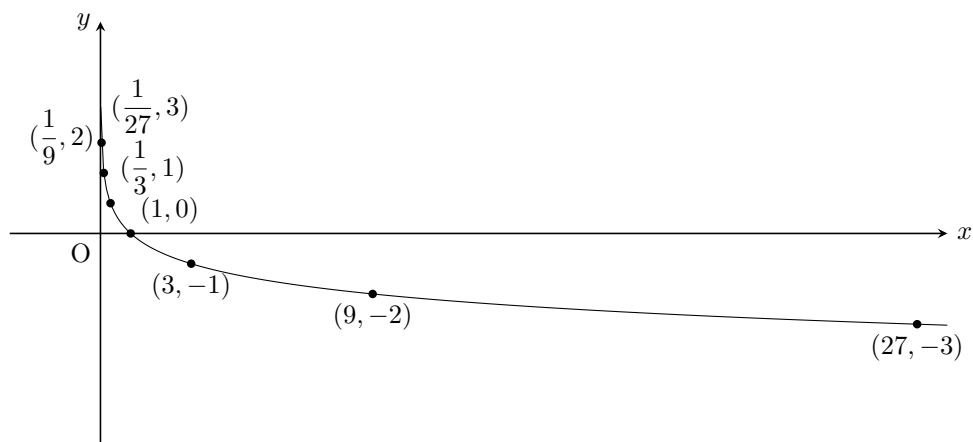
$$(4) 2 \log_3 \sqrt{5} + \log_3 \frac{9}{5} = \log_3 \sqrt{5}^2 + \log_3 \frac{9}{5} = \log_3 5 + \log_3 \frac{9}{5} = \log_3 \left(5 \times \frac{9}{5} \right) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

11.2 対数関数のグラフ

問題 11-8



問題 11-9



11.3 Excel による演習

問題 11-10

次のように入力すると、

	A	B	C
1	=LOG(1,2014)		
2	=LOG(100,1000)		
3	=LOG(6561,3)		
4	=LOG(1/2,16)		
5	=LOG(12,1/12)		
6	=LOG(1/3125,1/5)		
7	=LOG(1/100,10000)		
8	=LOG(64,1/2)		
9			
10			

下記のような結果が得られる。

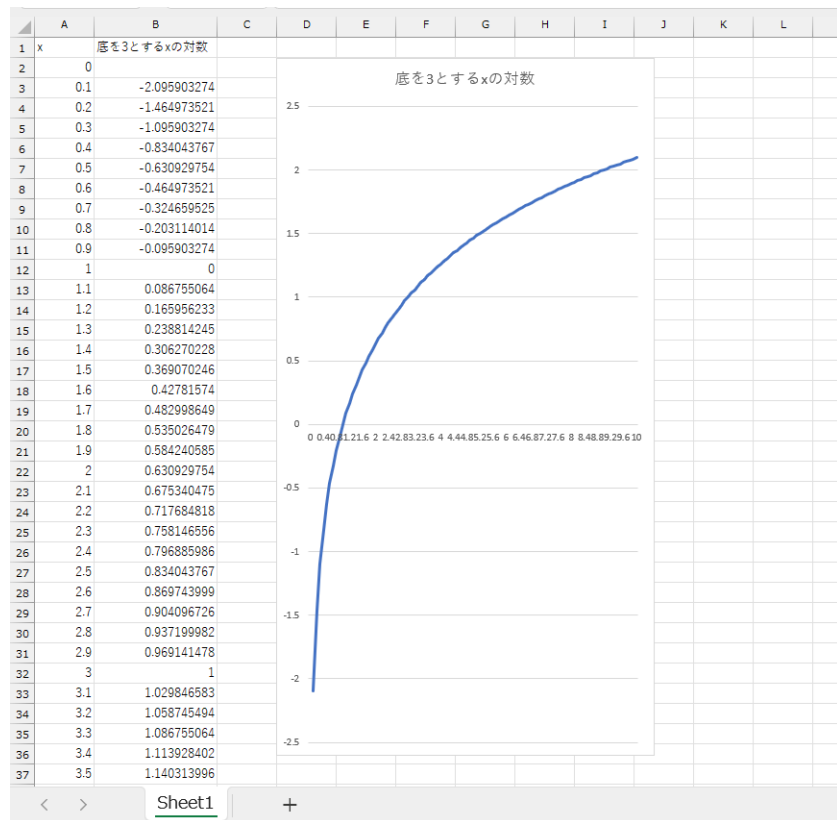
	A	B	C	D
1	0			
2	0.666667			
3	8			
4	-0.25			
5	-1			
6	5			
7	-0.5			
8	-6			
9				
10				

なお、セル A2, A4, A7 の表示形式を「分数」にすると、下記のようなになる（ホームタブの（数値グループの）[数値の書式] を「分数」に変更している）。

	A	B	C	D
1	0			
2	2/3			
3	8			
4	- 1/4			
5	-1			
6	5			
7	- 1/2			
8	-6			
9				
10				

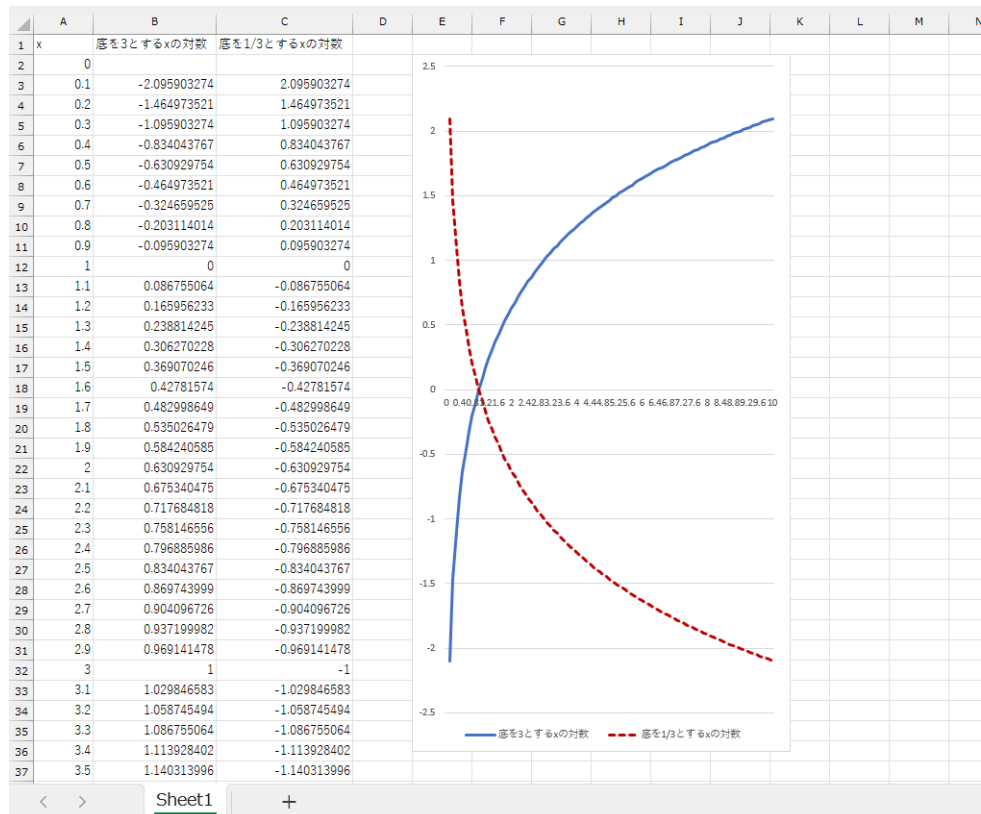
問題 11-11

例題 11-11 のファイルにおいて、セル B1 を「底を 3 とする x の対数」に入力しなおす。また、セル B3 を「=LOG(A3,3)」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。



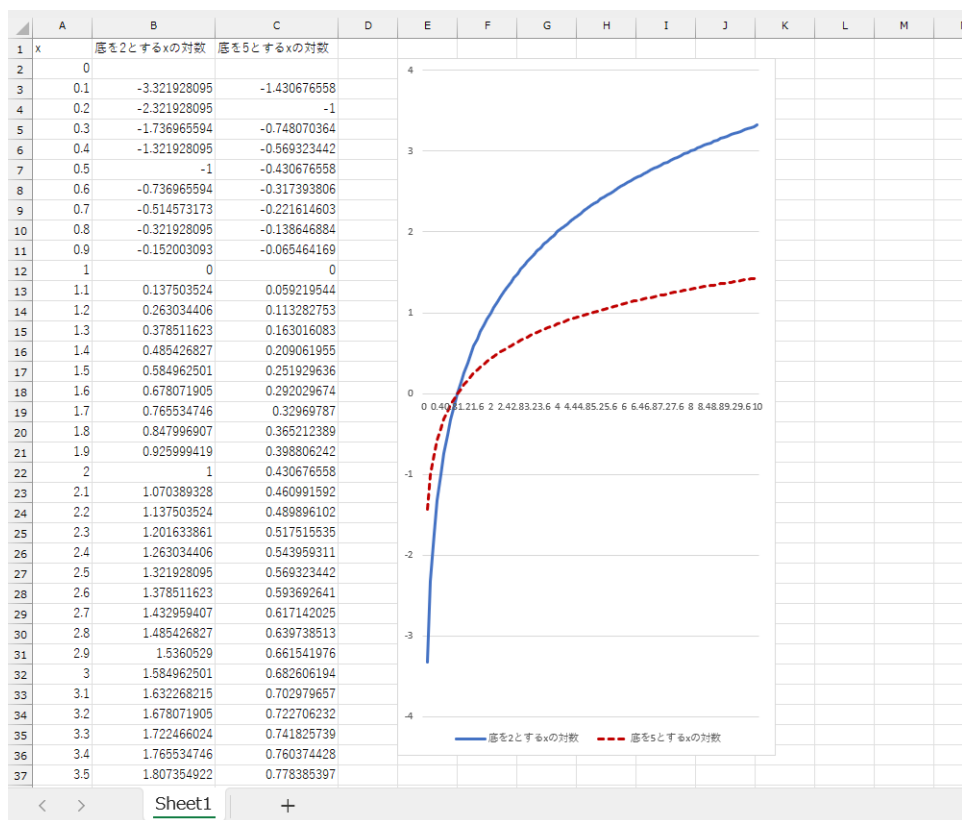
問題 11-12

例題 11-12 のファイルにおいて、セル B1 を「底を 3 とする x の対数」、セル C1 を「底を 1/3 とする x の対数」に入力しなす。また、セル B3 を「=LOG(A3,3)」, セル C3 を「=LOG(A3,1/3)」に入力しなす、これらをそれぞれ 102 行目まで下にオートフィルすればいい。

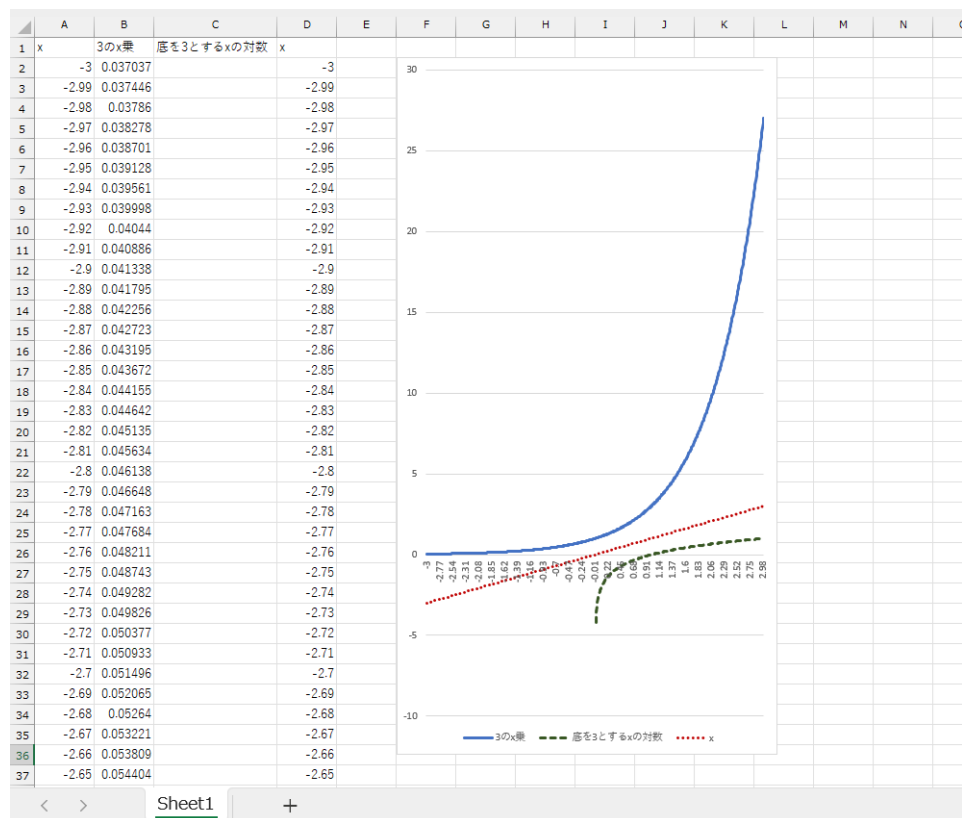


問題 11-13

例題 11-12 のファイルにおいて、セル C1 を「底を 5 とする x の対数」に入力しなおす。また、セル C3 を「 $=\text{LOG}(A3,5)$ 」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。



問題 11-14



第 12 章 微分係数

12.1 関数の極限

問題 12-1

$$(1) \lim_{x \rightarrow 10} (2x + 11) = 2 \times 10 + 11 = 31$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+5)^2 - 25}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 10x + 25) - 25}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 10x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 10) = 0 + 10 = 10$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} 12 = 12$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x + 4}{7} = \frac{3^2 - 3 + 4}{7} = \frac{9 - 3 + 4}{7} = \frac{10}{7}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{4} = \frac{4 - 4}{4} = 0$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)(x-5) + 10}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - 3x - 10) + 10}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 3) = 0 - 3 = -3$$

問題 12-2

$$(1) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{10} = \frac{5 - 5}{10} = 0$$

(2) x が 5 と異なる値をとりながら 5 に限りなく近づくとき, $f(x)$ は 0 に限りなく近づく.

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} (x + 1) = 0 + 1 = 1$$

(4) x が 0 と異なる値をとりながら 0 に限りなく近づくとき, $f(x)$ は 1 に限りなく近づく.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

問題 12-3

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 3 + 3 = 6$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 3x - 18}{x + 6} = \lim_{x \rightarrow -6} \frac{(x+6)(x-3)}{x+6} = \lim_{x \rightarrow -6} (x-3) = -6 - 3 = -9$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 7}{x^2 - 5x - 14} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x - 7}{(x-7)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{7+2} = \frac{1}{9}$$

問題 12-4

$$(1) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-5} - 1}{x - 6} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(\sqrt{x-5} - 1)(\sqrt{x-5} + 1)}{(x-6)(\sqrt{x-5} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x-5) - 1}{(x-6)(\sqrt{x-5} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{(x-6)(\sqrt{x-5} + 1)} \\ = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{\sqrt{x-5} + 1} = \frac{1}{\sqrt{6-5} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = \sqrt{1} + 1 = 2$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

12.2 関数の傾きと微分の関係

問題 12-5

関数 $y = f(x)$ について、 $f(x) = -3x + 6$ と定義されているとする。 x が 1 から 5 まで変わるときの平均変化率を求める。

このとき、グラフ上の点 (1, 3) は点 (5, -9) へ変化している。そして、 x の増加量は $(5 - 1 =) 4$ で、 y の増加量は $(-9 - 3 =) -12$ であることがわかる。つまり、ここでは

$$\text{平均変化率} = \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{-9 - 3}{5 - 1} = -3$$

となる。

問題 12-6

関数 $y = f(x)$ について、 $f(x) = x^2$ と定義されているとする。 x が 1 から 2 まで変わるときの平均変化率を求める。

このとき、グラフ上の点 (1, 1) は点 (2, 4) へ変化している。そして、 x の増加量は $(2 - 1 =) 1$ で、 y の増加量は $(4 - 1 =) 3$ であることがわかる。つまり、ここでは

$$\text{平均変化率} = \frac{y \text{ の増加量}}{x \text{ の増加量}} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{4 - 1}{2 - 1} = 3$$

となる。この平均変化率「3」は、グラフ上の点 (1, 1) と点 (2, 4) を結ぶ直線の傾きと一致することが確認できる。

問題 12-7

$f(x) = x^2$ とおくと、求める微分係数は次のように計算される。

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + h) = 4$$

問題 12-8

問題 12-7 より、関数 $y = x^2$ の $x = 2$ における微分係数は 4 である。これより、この関数の点 (2, 4) における接線の傾きは 4 であることがわかる。よって、求める接線の式は

$$y = 4(x - 2) + 4$$

である。これを整理すると、 $y = 4x - 4$ となる。

問題 12-9

$f(x) = x^2$ とおくと、求める微分係数は

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 - (-2)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-4 + h) = -4$$

と計算される。

問題 12-10

問題 12-9 より，関数 $y = x^2$ の $x = -2$ における微分係数は -4 である．これより，関数 $y = x^2$ の点 $(-2, 4)$ における接線の傾きは -4 であることがわかる．よって，求める接線の式は

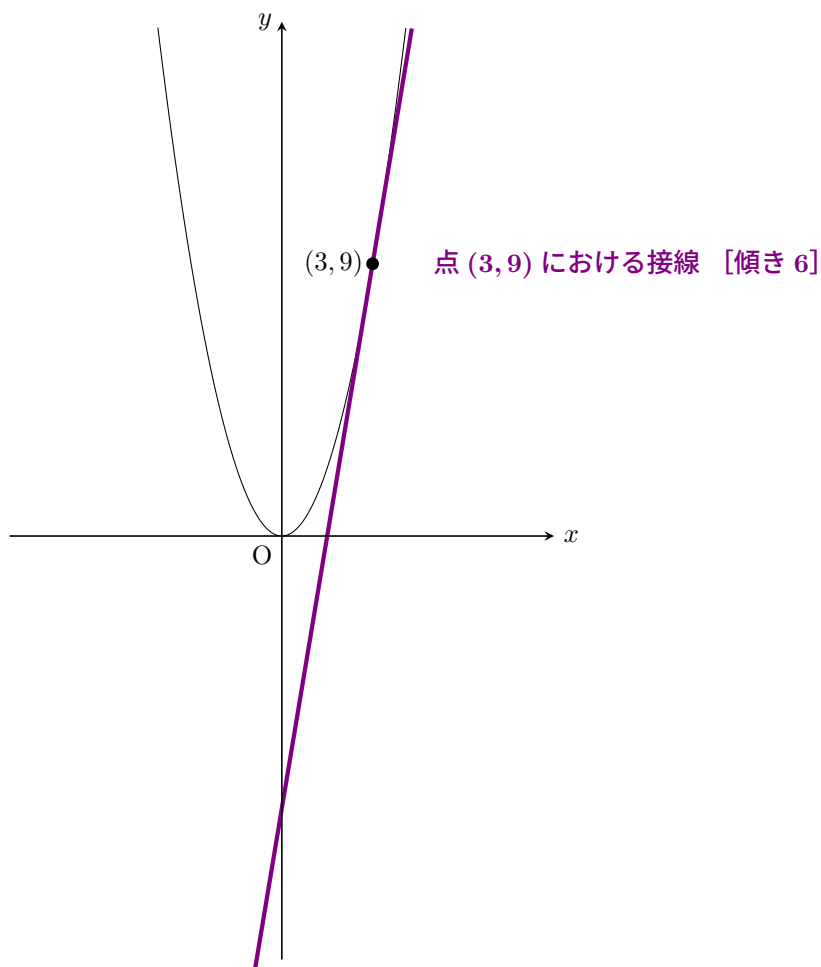
$$y = -4(x - (-2)) + 4$$

である．これを整理すると， $y = -4x - 4$ となる．

問題 12-11

$f(x) = x^2$ とおくと，求める微分係数は次のように計算される．

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6 + h) = 6$$



問題 12-12

問題 12-11 より，関数 $y = x^2$ の $x = 3$ における微分係数は 6 である．これより，この関数の点 $(3, 9)$ における接線の傾きは 6 であることがわかる．よって，求める接線の式は

$$y = 6(x - 3) + 9$$

である．これを整理すると， $y = 6x - 9$ となる．

12.3 Excel による演習

問題 12-13

例題 12-9 のファイルにおいて、セル C2 を「-1」に入力しなおせばいい。すると、関数 $y = x^2$ の $x = -1$ における微分係数の近似値 -1.9 が、セル E2 に計算される。

問題 12-14

上の例題または問題のファイルにおいて、セル C2 を「-3」に入力しなおせばいい。すると、関数 $y = x^2$ の $x = -3$ における微分係数の近似値 -5.9 が、セル E2 に計算される。

問題 12-15

上の例題または問題のファイルにおいて、セル C2 を「0」に入力しなおせばいい。すると、関数 $y = x^2$ の $x = 0$ における微分係数の近似値 0.1 が、セル E2 に計算される。

問題 12-16

上の例題または問題のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^3」と書き換え、これを 102 行目まで下にオートフィルする。さらに、セル C2 を「3」、セル D2 を「=C2^3」、セル E2 を「=((C2+0.1)^3-D2)/0.1」に入力しなおせばいい。すると、関数 $y = x^3$ の $x = 3$ における微分係数の近似値 27.91 が、セル E2 に計算される。

問題 12-17

例題 12-10 のファイルにおいて、セル C2 を「3」に入力しなおせばいい。すると、関数 $y = x^2$ の点 $(3, 9)$ における接線のグラフが作成される。

問題 12-18

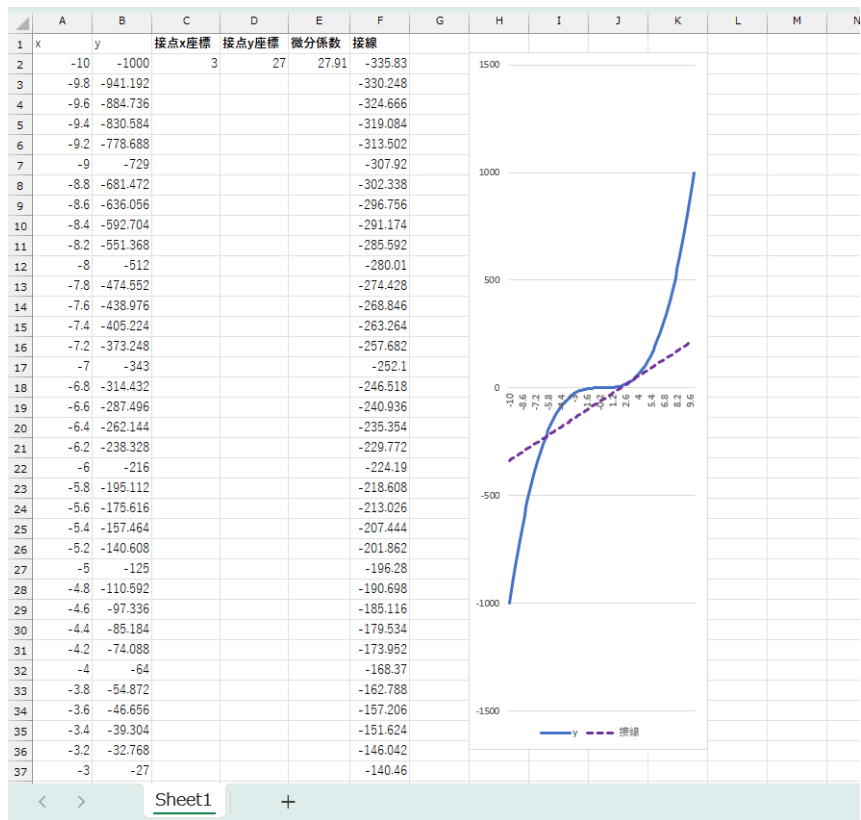
上の例題または問題のファイルにおいて、セル C2 を「-3」に入力しなおせばいい。すると、関数 $y = x^2$ の点 $(-3, 9)$ における接線のグラフが作成される。

問題 12-19

上の例題または問題のファイルにおいて、セル C2 を「0」に入力しなおせばいい。すると、関数 $y = x^2$ の点 $(0, 0)$ における接線のグラフが作成される。

問題 12-20

上の例題または問題のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^3」と書き換え、これを 102 行目まで下にオートフィルする。さらに、セル C2 を「3」、セル D2 を「=C2^3」、セル E2 を「=((C2+0.1)^3-D2)/0.1」に入力しなおせばいい。すると、関数 $y = x^3$ の点 $(3, 27)$ における接線のグラフが作成される。



第 13 章 1 変数関数の微分法

13.1 導関数

問題 13-1

関数 $f(x) = x^2$ の導関数の式 $f'(x) = 2x$ の「 x 」に「 -2 」, 「 0 」, 「 3 」をそれぞれ代入すると,

$$f'(-2) = 2 \times (-2) = -4, \quad f'(0) = 2 \times 0 = 0, \quad f'(3) = 2 \times 3 = 6$$

となり, 前章で求めた各微分係数の値

$$f'(-2) = -4, \quad f'(0) = 0, \quad f'(3) = 6$$

とそれぞれ一致することが確認できる.

問題 13-2

$f'(x) = 3x^2$ となるので, 次がわかる.

$$f'(-10) = 3 \times (-10)^2 = 3 \times 100 = 300, \quad f'(10) = 3 \times 10^2 = 3 \times 100 = 300$$

問題 13-3

(1) 求める微分係数は, 次のように計算される.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10(x+h) - 10x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10x + 10h - 10x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 10 = 10$$

よって, 関数 $f(x) = 10x$ の導関数は $f'(x) = 10$ である.

(2) 求める微分係数は, 次のように計算される.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10 - 10}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

よって, 関数 $f(x) = 10$ の導関数は $f'(x) = 0$ である.

問題 13-4

$$(1) f'(x) = (x^3)' + (x^2)' = 3x^2 + 2x$$

$$(2) f'(x) = 3 \times (x^2)' - 6 \times (x)' - 9' = 3 \times 2x - 6 \times 1 - 0 = 6x - 6$$

$$(3) f'(x) = (\sqrt{x})' - \frac{1}{8} \times x' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{8} \times 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{8}$$

$$(4) f'(x) = 12 \times (\sqrt{x})' + 3 \times \left(\frac{1}{x}\right)' = 12 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{6}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$$

$$(5) f'(x) = \frac{1}{10} \times (x^3)' + \frac{1}{10} \times (x^2)' + \frac{1}{10} \times (x)' = \frac{1}{10} \times 3x^2 + \frac{1}{10} \times 2x + \frac{1}{10} \times 1 = \frac{3x^2}{10} + \frac{x}{5} + \frac{1}{10}$$

$$(6) f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{x}\right)' - (\sqrt{2})' = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 0 = -\frac{1}{\sqrt{2}x^2}$$

13.2 関数の増減とグラフ

問題 13-5

2 次関数 $f(x) = -x^2$ を微分すると、 $f'(x) = -2x$ となる。よって、 $f'(x)$ は $x = 0$ で符号が変化する。

- (i) $x < 0$ であるような x については $f'(x) (= -2x) > 0$ (接線の傾きが正) であり、 $f(x) = -x^2$ は増加する。
- (ii) $x = 0$ であるときは、 $f'(0) (= -2 \times 0) = 0$ (接線の傾きが 0) である。また、 $f(0) = -0^2 = 0$ である。
- (iii) $x > 0$ であるような x については $f'(x) (= -2x) < 0$ (接線の傾きが負) であり、 $f(x) = -x^2$ は減少する。

これより増減表は次のようになる。

x	\cdots	0	\cdots
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	\nearrow	0	\searrow

問題 13-6

3 次関数 $f(x) = x^3 - 3x^2$ について、微分すると、 $f'(x) = 3x^2 - 3 \times 2x = 3x^2 - 6x$ となる。これは、

$$f'(x) = 3x(x - 2)$$

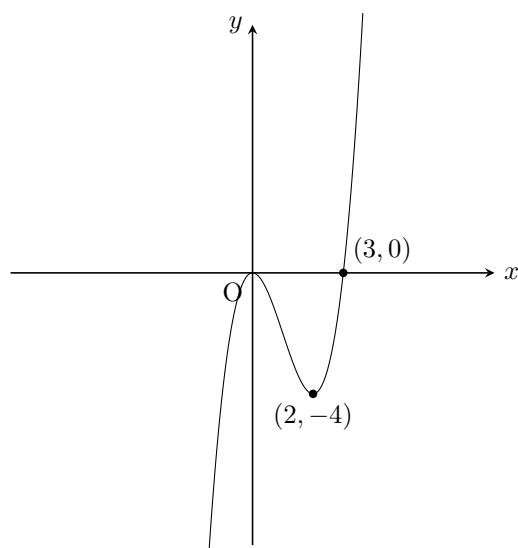
と変形できる。よって、 $x = 0$ または $x = 2$ のときに、 $f'(x)$ は 0 になる。

- (i) $x < 0$ であるような x については $f'(x) > 0$ (接線の傾きが正) であり、 $f(x) = x^3 - 3x^2$ は増加する。
- (ii) $x = 0$ であるときは、 $f'(0) = 0$ (接線の傾きが 0) である。また、 $f(0) = 0^3 - 3 \times 0^2 = 0$ である。
- (iii) $0 < x < 2$ であるような x については $f'(x) < 0$ (接線の傾きが負) であり、 $f(x) = x^3 - 3x^2$ は減少する。
- (iv) $x = 2$ であるときは、 $f'(2) = 0$ (接線の傾きが 0) である。また、 $f(2) = 2^3 - 3 \times 2^2 = -4$ である。
- (v) $x > 2$ であるような x については $f'(x) > 0$ (接線の傾きが正) であり、 $f(x) = x^3 - 3x^2$ は増加する。

これより増減表は次のようになる。

x	\cdots	0	\cdots	2	\cdots
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	\nearrow	0	\searrow	-4	\nearrow

以上より、グラフは下記のようなになる。



ここで、 $f(x) = x^3 - 3x^2$ について、 $f(x) = 0$ となるような 0 以外の x を求めると、

$$f(x) = x^2(x - 3) = 0$$

より、 $x = 3$ となる． よって、グラフは点 $(3, 0)$ を通ることがわかる．

問題 13-7

3 次関数 $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 3$ について、微分すると、 $f'(x) = -3x^2 + 3 \times 2x - 3 \times 1 + 0 = -3x^2 + 6x - 3$ となる． これは、

$$f'(x) = -3(x^2 - 2x + 1) = -3(x - 1)^2$$

と変形できる．

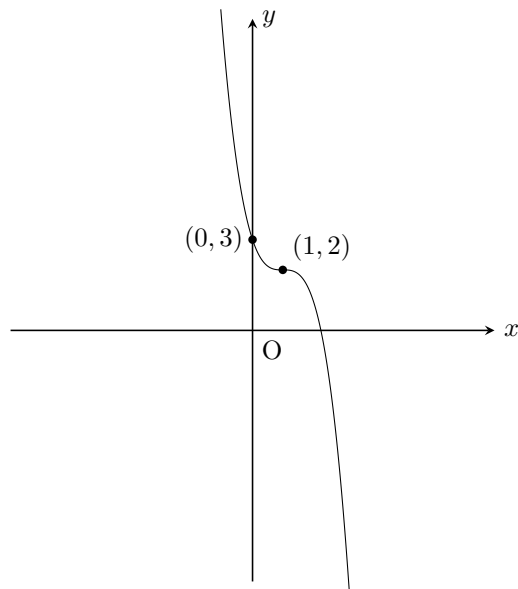
(i) $x = 1$ であるときは、 $f'(1) = 0$ （接線の傾きが 0 ）である． また、 $f(1) = -1^3 + 3 \times 1^2 - 3 \times 1 + 3 = 2$ である．

(ii) それ以外の x については $f'(x) < 0$ （接線の傾きが負）であり、 $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x + 3$ は減少する．

これより増減表は次のようになる．

x	\cdots	1	\cdots
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	\searrow	2	\searrow

以上より、グラフは下記のようなになる．

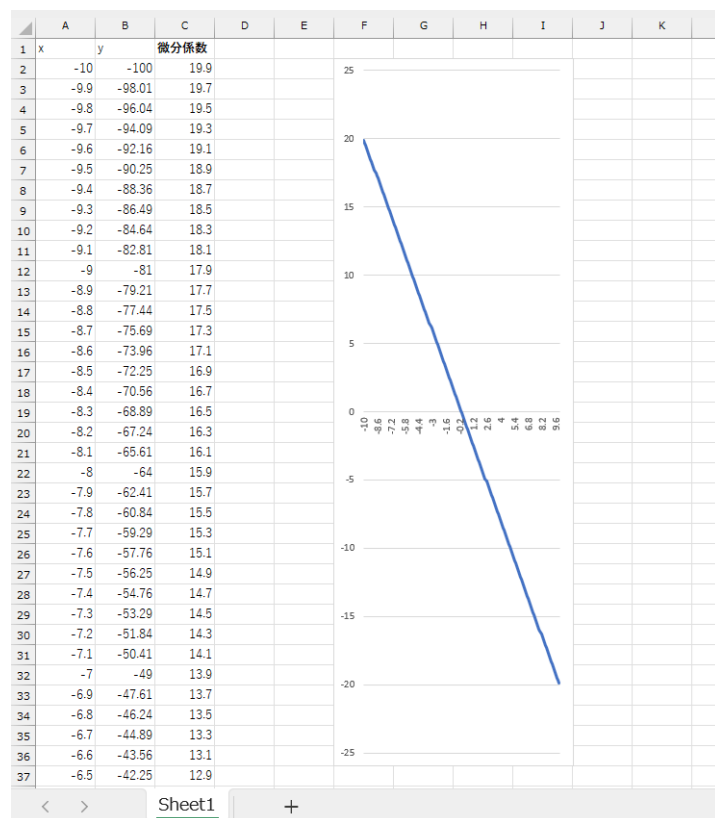


ここで、 $f(0) = -0^3 + 3 \times 0^2 - 3 \times 0 + 3 = 3$ なので、グラフは点 $(0, 3)$ を通ることがわかる。

13.3 Excel による演習

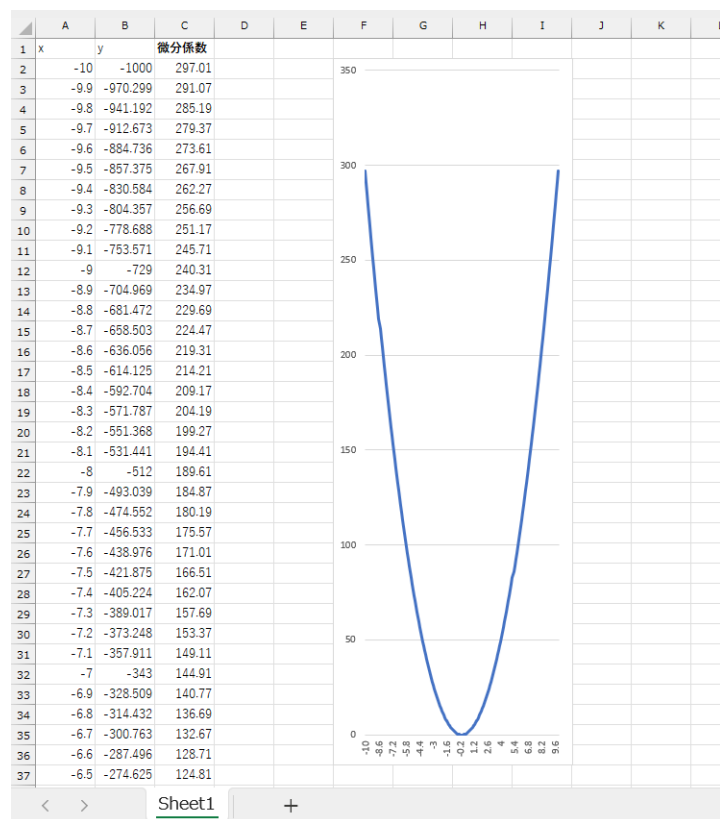
問題 13-8

例題 13-8 のファイルにおいて、セル B2 を「 $=(A2^2)$ 」に入力しなおし、これを 202 行目まで下にオートフィルすればいい。



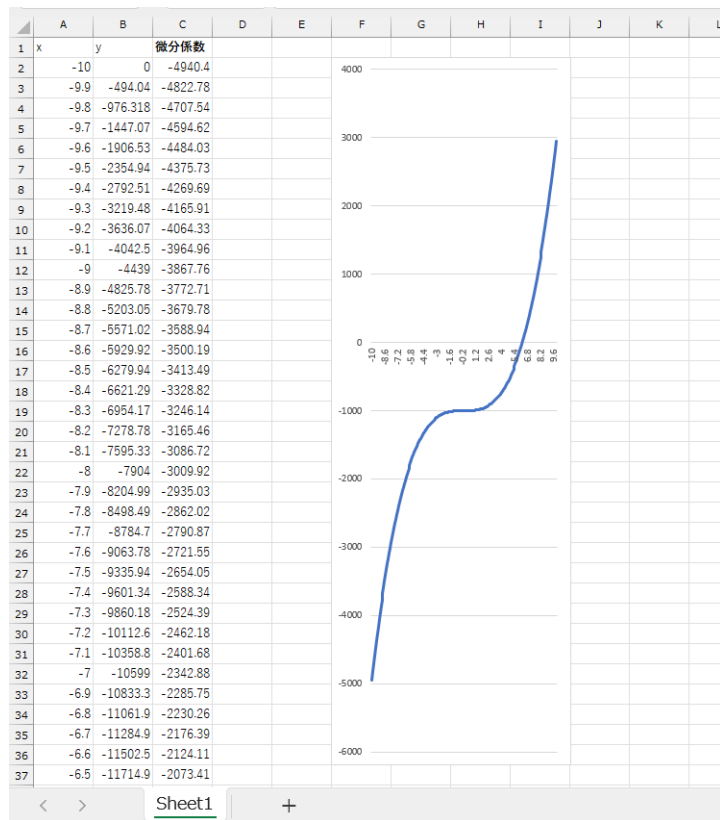
問題 13-9

上の例題または問題のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^3」に入力しなおし、これを 202 行目まで下にオートフィルすればいい。



問題 13-10

上の例題または問題のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^4-1000*A2-20000」に入力しなおし、これを 202 行目まで下にオートフィルすればいい。



第 14 章 1 変数関数の積分法

14.1 不定積分

問題 14-1

- (1) $\left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)' = \frac{1}{3} \times 3x^2 + 0 = x^2$ となることがたしかめられる.
- (2) $\left(-\frac{1}{x} + C\right)' = -\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 0 = \frac{1}{x^2}$ となることがたしかめられる.
- (3) $(2\sqrt{x} + C)' = 2 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + 0 = \frac{1}{\sqrt{x}}$ となることがたしかめられる.

問題 14-2

- (1) $\int (x^2 + x) dx = \int x^2 dx + \int x dx = \frac{1}{2+1}x^{(2+1)} + \frac{1}{1+1}x^{(1+1)} + C = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$
- (2) $\int (7x^2 - 13) dx = 7 \int x^2 dx - 13 \int 1 dx = 7 \times \frac{1}{2+1}x^{(2+1)} - 13 \times x + C = \frac{7}{3}x^3 - 13x + C$
- (3) $\int \left(\frac{3}{10}x^2 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{3}\right) dx = \frac{3}{10} \int x^2 dx + \frac{1}{5} \int x dx - \frac{2}{3} \int 1 dx$
 $= \frac{3}{10} \times \frac{1}{2+1}x^{(2+1)} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{1+1}x^{(1+1)} - \frac{2}{3} \times x + C = \frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{10}x^2 - \frac{2}{3}x + C$

14.2 積分と面積の関係

問題 14-3

$$\int_0^5 f(x) dx = F(5) - F(0) = \frac{5^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{25}{2}$$

問題 14-4

$F(x) = \frac{x^3}{12}$ とすると, これは $f(x) = \frac{x^2}{4}$ の原始関数のひとつなので,

$$\int_0^6 f(x) dx = F(6) - F(0) = \frac{6^3}{12} - \frac{0^3}{12} = 18$$

14.3 定積分

問題 14-5

$F(t) = \frac{t^3}{12}$ とすると, これは $f(t) = \frac{t^2}{4}$ の原始関数のひとつなので,

$$\int_0^x f(t) dt = F(x) - F(0) = \frac{x^3}{12} - \frac{0^3}{12} = \frac{x^3}{12}$$

問題 14-6

$$\int_0^3 2x \, dx = [x^2]_0^3 = 3^2 - 0^2 = 9 - 0 = 9,$$

$$\int_3^6 2x \, dx = [x^2]_3^6 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$$

となる． よって，

$$\int_0^3 2x \, dx + \int_3^6 2x \, dx = 9 + 27 = 36$$

となることがわかる． ここで， 例題 14-5(1) より， $\int_0^6 2x \, dx = 36$ なので，

$$\int_0^6 2x \, dx = \int_0^3 2x \, dx + \int_3^6 2x \, dx$$

となることがたしかめられた．

問題 14-7

$$\begin{aligned} (1) \int_0^8 (4x - 2) \, dx &= \left[4 \times \frac{1}{1+1} x^{(1+1)} - 2 \times x \right]_0^8 = [2x^2 - 2x]_0^8 \\ &= 2 \times 8^2 - 2 \times 8 - (2 \times 0^2 - 2 \times 0) = 2 \times 64 - 16 - (2 \times 0 - 0) = 112 \end{aligned}$$

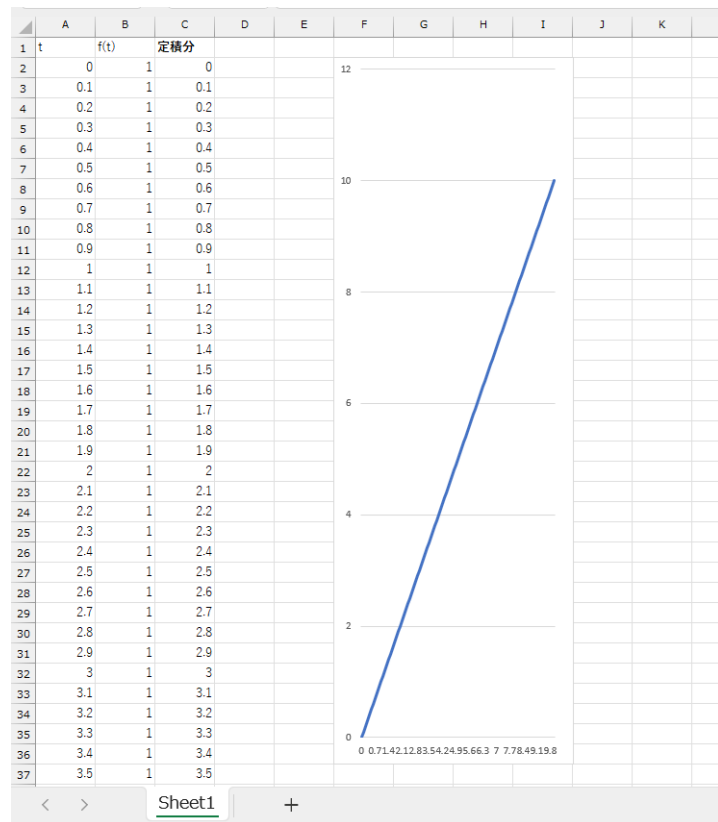
$$\begin{aligned} (2) \int_{-2}^2 (12x^2 + 12) \, dx &= \left[12 \times \frac{1}{2+1} x^{(2+1)} + 12 \times x \right]_{-2}^2 = [4x^3 + 12x]_{-2}^2 \\ &= 4 \times 2^3 + 12 \times 2 - (4 \times (-2)^3 + 12 \times (-2)) = 4 \times 8 + 24 - (4 \times (-8) - 24) = 112 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_{-10}^1 (30x^2 - 20x + 100) \, dx &= \left[30 \times \frac{1}{2+1} x^{(2+1)} - 20 \times \frac{1}{1+1} x^{(1+1)} + 100 \times x \right]_{-10}^1 \\ &= [10x^3 - 10x^2 + 100x]_{-10}^1 = 10 \times 1^3 - 10 \times 1^2 + 100 \times 1 - (10 \times (-10)^3 - 10 \times (-10)^2 + 100 \times (-10)) \\ &= 10 \times 1 - 10 \times 1 + 100 - (10 \times (-1000) - 10 \times 100 - 1000) \\ &= 10 - 10 + 100 - (-10000 - 1000 - 1000) = 100 - (-12000) = 12100 \end{aligned}$$

14.4 Excel による演習

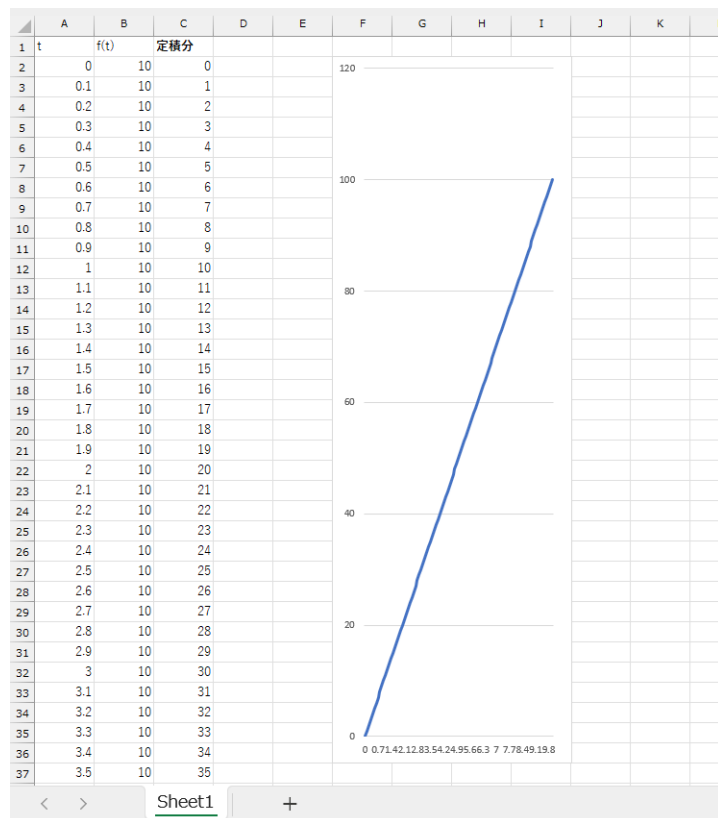
問題 14-8

例題 14-7 のファイルにおいて，セル B2 を「1」に入力しなおし，これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい．



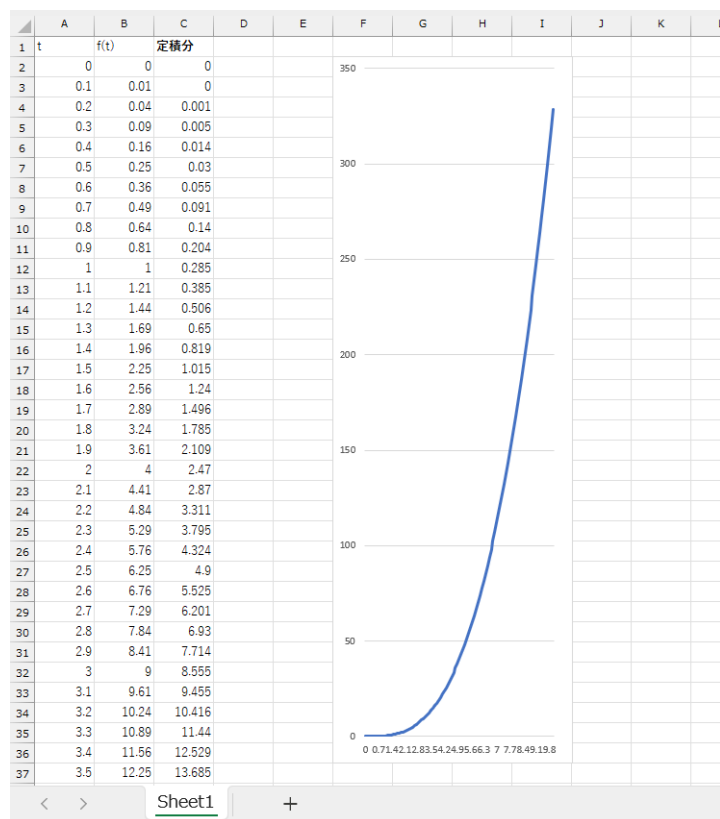
問題 14-9

上の例題または問題のファイルにおいて、セル B2 を「10」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。



問題 14-10

上の例題または問題のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^2」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。



問題 14-11

上の例題または問題のファイルにおいて、セル B2 を「=A2^3」に入力しなおし、これを 102 行目まで下にオートフィルすればいい。

