

補足資料 7B: 一般相対理論とスピンドYNAMIKSの結合(高度: 興味のある方向け)

スピントロニクスで応用が期待される磁気回転効果—アインシュタイン＝ドハース効果やバーネット効果—は, 一般には「スピンと機械的角運動量の結合」として説明されます。しかし, この結合は単なる現象論ではなく, 量子力学, 特殊相対性理論, 一般相対性理論が連続的につながる深い理論構造の上に成り立っています。その理論構造のダイジェストを, 段階を追って解説します。厳密な理論的展開に関しては, 記載している文献を参照してもらえたらと思います。

1. シュレディンガー方程式とエネルギー関係式

非相対論的なエネルギー関係式は,

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(x) \quad (7B-1)$$

という形をしています。量子力学では, 古典力学の運動量 p をそのまま使うのではなく, 運動量を演算子に置き換えます(補足資料 7A の理論的補足 3 参照)。

$$\mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i} \nabla \quad (7B-2)$$

すると, エネルギーも演算子に置き換えられ,

$$\hat{H} = \hat{\mathbf{p}}^2/2m + V(x) \quad (7B-3)$$

となります。

量子力学では, エネルギー E を「時間微分の演算子」に対応させます。(補足資料 7A の理論的補足 3 参照)

$$E \rightarrow i\hbar \partial / \partial t \quad (7B-4)$$

これらの対応関係から非相対論的なエネルギーの式から,

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} = \hat{H} \psi(x) \quad (7B-5)$$

という式が得られます。これが 時間依存シュレディンガー方程式 です。(ここでは, 導出を示しているのではなく, エネルギーの式とシュレディンガー方程式の対応関係のみ記述しています。) ここで, 見てきたように, シュレディンガー方程式は, 非相対論的なエネルギー関係を満たす方程式であることから, 非相対論的な量子力学の方程式となります。

2. 非相対論の量子力学から相対論の量子力学へ([1, 2])

それでは, 相対論的なエネルギー関係を満たす相対論的な量子力学の方程

式とは、どのようなものでしょうか。特殊相対性理論のエネルギー関係式（ポテンシャルエネルギーは除く）は

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (7B-6)$$

という二乗の形をしています。この式をそのまま量子化すると、式(7B-6)に対して式(7B-2,4)を代入することになるため、時間について二階微分を含む方程式（クライン・ゴルドン方程式）が得られます。しかし、この二階微分の記述では、量子力学が本来持っていた「現在の状態だけで未来が決まる」という時間一次微分の特徴が失われてしまいます。ディラックは、この問題を解決するために、相対論的エネルギー式(7B-6)を 因数分解できる形に書き換えることを考えました。つまり、

$$E^2 - (\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4) = (E - A)(E - B) = 0 \quad (7B-7)$$

のように「一次の形」に分解できれば、量子化したときに 時間一次微分の方程式 が得られるはずだ、と考えたのです。この因数分解を実現するためには、 E や $\mathbf{p}$ に掛ける係数 A , B が単なる数ではなく、互いに非可換な「行列」である必要があります。ディラックはこの行列を具体的に構成し、相対論的でありながら時間一次微分の量子力学を満たす方程式として、次のディラック方程式を導きました。電子の場合のディラック方程式は、

$$[-i c \gamma^\mu p_\mu + m c^2] \Psi = 0 \quad (7B-8)$$

$$p_\mu = \left(-\frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\hbar}{i} \nabla \right) \quad (7B-9)$$

と記述されます。ここで、 p_μ は四元運動量であり、式(7B-9)で示すように時間および空間に関する偏微分を含む演算子を含みます。 γ は 4×4 行列であり、 Ψ は 4 成分の波動関数（スピノル） になります。この 4 成分はスピン自由度（上向き・下向き）および粒子と反粒子の自由度（電子と陽電子）を表します。ディラック方程式は因数分解の要請から自然にスピンの存在や反粒子の存在を予言したことになります。

3. ゲージ原理による電磁相互作用項の導出[2]

前節で与えられるディラック方程式は自由電子であり、電磁場との相互作用の影響は含まれていません。では、どのように電荷と電磁場との相互作用がディラック方程式に組み込まれるのでしょうか。その答えはゲージ原理です。

Maxwell 方程式で記述される電磁場に対しては、ゲージ変換を行っても物理系が不変であるという局所ゲージ対称性が成り立つことが知られています。重要なのは、この局所ゲージ対称性が電磁場単体にとどまらず、電磁場と相互作用する電子にも同様に適用される点です。この要請のもとで理論を構成すると、ディラック方程式には共変微分が導入され、その結果として電磁気相互作用が自然に現れます。

$$[-ic\gamma^\mu(p_u - \frac{q}{c}A_u(\mathbf{x})) + mc^2]\Psi = 0 \quad (7B-10)$$

電磁場を表す四元ベクトルポテンシャル $A_u(\mathbf{x})$ を含む第二項は、ゲージ原理に基づいて導入される電磁気相互作用項です。 p_u は式(7B-9)で見たように時空間に対する偏微分 ∂_μ に対応するため、 $p_u - \frac{q}{c}A_u(\mathbf{x})$ はゲージ原理が成り立つように偏微分 ∂_μ が共変微分 $D_\mu = \partial_\mu - \frac{iq\hbar}{c}A_u(\mathbf{x})$ に置き換わったことを意味します。

ゲージ対称性の重要な点として、「局所的な位相の選び方に物理法則が依存しない」という要請があり、この要請が場と物質場の結び付き方を決めます。この考え方は電磁気相互作用に限らず、素粒子論で他の相互作用項を導く際の基本原理として働きます。そして同じ発想は、書籍本編 6 章のコラム 2・4 で扱われたベリー位相やベリー接続にも自然に広がります。ベリー接続は量子状態が依存する外部パラメータの空間に現れる仮想的な磁場（ゲージ場）であり、実際の電磁場が存在しなくても量子状態の変化だけでゲージ場が立ち上がります。つまり、ゲージ原理は「物理的な場」を導入するための手法にとどまらず、量子状態の振る舞いを記述するための普遍的な言語として機能しています。

4. 曲がった時空におけるディラック方程式の記述

前節で与えられるディラック方程式は、特殊相対論を前提とした平坦な時空において定義されており、ローレンツ変換の下で物理法則が不変であるというローレンツ対称性を満たしています。一般相対性理論[3, 4, 5]では、重力は質量が存在することによる時空の曲がりとして記述され、また等価原理により、重力と加速は局所的に等価であると考えられます。（「曲がった」時空に関しては、補足資料の 7C の 5.3 で簡単に触れています）。では、このディラック方程式を一般相対性理論が扱う「曲がった」時空に拡張するには、どのようにすればよいのでしょうか。曲がった時空では、時空全体で一つの慣性系をとることはできません。しかし、等価原理に基づいて各時空点に局所慣性

系を導入することで、その点の近傍では局所的にローレンツ対称性が成り立ちます。ディラック方程式で扱う電子場は、スピンの自由度を含む場であり、その変換は通常のベクトル場とは異なります。そのため、座標変換不変性と局所ローレンツ対称性を同時に満たすためには、通常の微分だけでは不十分であり、新たな接続を導入する必要があります[6, 7]。こうして導入されるのがスピン接続であり、これは曲がった時空におけるディラック場の共変微分の中に現れ、局所ローレンツ対称性を保つ役割を果たします。スピン接続を組み込んだ一般相対論的ディラック方程式は以下のようになります[8-10]。

$$[-i\gamma^\mu(\mathbf{x})(p_\mu - \frac{q}{c}A_\mu(\mathbf{x}) - \Gamma_\mu(\mathbf{x})) + mc^2]\Psi = 0 \quad (7B-11)$$

ここで第三項は、スピン接続 $\Gamma_\mu(\mathbf{x})$ であり、回転や重力に由来する時空の幾何学的情報が含まれています。これら第一項から第三項を合わせたものが共変微分 $D_\mu = \partial_\mu - \frac{iq\hbar}{c}A_\mu(\mathbf{x}) - i\hbar\Gamma_\mu(\mathbf{x})$ を構成しており、スピン接続は微分演算子を「平坦な時空」から「曲がった時空」に拡張する役割を果たしています。

上述の等価原理に基づく回転系における非慣性効果も、時空の曲がりとして取り扱うことができます(加速運動による時空の曲がりの直感的な例を本資料の**理論的補足**にて説明)。磁性体の力学的回転の効果は、式(7B-11)のスピン接続などを通じて理論に組み込まれ、ディラック方程式は回転の影響を含んだ形に拡張されます[8-10]。このディラック方程式を非相対論的極限で展開すると、エネルギーを表す有効ハミルトニアンの中に、電子のスピンと力学的回転の角速度ベクトルとの内積で表される項(書籍中の式(7.7))が現れます。このスピン接続 $\Gamma_\mu(\mathbf{x})$ に由来する磁氣的・力学的結合は、アインシュタインとドハースによって実験的に観測され、現在ではアインシュタイン＝ドハース効果として知られています。磁化の変化が物質の回転運動を引き起こすこの現象は、スピンと機械的角運動量が本質的に結びついていることを示しています。対応する逆の現象として、機械的な回転によって磁化が生じるバーネット効果も知られていますが、両者は同一のスピン-回転結合に由来する双対的な現象と理解することができます。

アインシュタイン自身は、彼自身が発見した磁場と機械的角運動量が結びつく現象が、彼が構築した一般相対性理論に内在する幾何学的構造と深く関係しているとは、当時は想像していなかったかもしれません。しかし現代的な視点から見ると、スピン接続 $\Gamma_\mu(\mathbf{x})$ はまさにこの結び付きを統一的に説明する枠組みを与えており、アインシュタイン自身が関わった実験結果が、彼自身の

理論によって後に裏付けられる形になっていると捉えることができます。

現在, 量子論というミクロな現象を扱う理論と, 一般相対性理論という宇宙スケールの現象を扱う理論は, 長い間別々に発展してきました。両者には統一が難しい部分があり, 統一理論として超弦理論[11, 12]などが有力な候補として研究されていますが, まだ完全な統合には至っていません。それでも, 多くの物理学者は, 最終的には両者が統一されると信じて研究を続けています。そのような背景の中で, 量子論と一般相対論が織りなす現象として磁気回転効果が存在し, その物理が次世代デバイスとして工学的に応用されつつあるという事実は非常に興味深いものです。ミクロとマクロという異なる理論体系が, 実際のデバイス技術の中で結びついていることに強い感動を覚えます。

補足：加速運動と時空の幾何学との関係を示す一例[4]

円盤の円周と直径を物差しで測る状況を考えます。慣性系 K で測れば, 円周 $\div$ 直径 $= \pi$ となり, 平坦な空間を前提とするユークリッド幾何学の結果と一致します。では, 慣性系 K に対して円盤の面に垂直な軸まわりで一様に回転している座標系 K' を考えた時, 座標系 K' に対して静止している物差しを用いて測定するとどうなるでしょうか。慣性系 K から見ると, 円周方向に沿って置かれた物差しは円周方向に対して運動しているため, 特殊相対性理論の結果としてローレンツ収縮を受けます。一方, 直径方向に置かれた物差しは直径方向に対して運動していないため, 長さは変化しません。この結果, 円周方向の長さだけが短縮されるため, 円周 $\div$ 直径 $> \pi$ となり, ユークリッド幾何学が成立しなくなります。これは, 加速運動（この場合は円運動）によって時空の幾何学が変化することを示す一例といえます。

参考文献

- [1] P. A. M. ディラック (著), 朝永 振一郎ほか (訳) : 『ディラック 量子力学 原著第四版 改訂版』, 岩波書店 (2017).
- [2] 坂本眞人 (著) : 『場の量子論 ―不変性と自由場を中心にして―』, 裳華房 (2017).
- [3] T. Fliessbach (著), 杉原 亮, 庄司 多津男, 南部 保貞 (訳) : 『一般相対性理論』, 共立出版 (2005).
- [4] L. ランダウ, E. リフシッツ (著) , 恒藤 敏彦 (訳) : 『場の古典論＝電気力学, 特殊および一般相対性理論＝ (原書第 6 版) , 東京図書 (2022).
- [5] P. A. M. ディラック (著), 江沢洋 (訳) : 『一般相対性理論』, 筑摩書房 (2005).
- [6] 藤川和男 (著) : 『経路積分と対称性の量子的破れ』, 朝倉書店 (2001).
- [7] 細道 和夫 (著) : 『弦とブレーン』, 朝倉書店 (2017).
- [8] 前川 禎通, 堤 康雅 (著) : 『スピントロニクス ― 21 世紀の物性』, 日本評論社 (2019).
- [9] 松尾 衛 (著) : 『相対論とゲージ場の古典論を噛み砕くーゲージ場の量子論を学ぶ準備としてー』, 現代数学社 (2019).
- [10] 松尾 衛, 齊藤 英治, 前川 禎通 : 非慣性系のスピントロニクス, 日本物理学会誌 **72**, 641-648 (2017).
- [11] 畑 浩之 (著) : 『入門 弦理論』, 東京図書 (2015).
- [12] 江口 徹, 菅原 祐二 (著) : 『共形場理論』, 東京図書 (2015).