

補足資料 7C 弱形式 PDE および形式 PDE による変分問題の解析

弱形式 PDE 機能を用いて、物理の支配方程式を弱形式として COMSOL に実装する方法を示します。また、弱形式と変分原理の類似性から、変分問題を弱形式 PDE で計算する方法を事例と通して説明します。

1. 弱形式とは

有限要素法では、物理現象を記述する微分方程式をそのままの形で計算するのではなく、弱形式という形に書き換えて扱います。弱形式とは、方程式に試験関数(テスト関数)を掛けて積分し、部分積分を行うことで得られる「積分形の方程式」です[1]。これによって、境界条件や複雑な形状を自然に取り込むことができます。この方法を使うと、数値計算では「方程式を完全に満たす」必要はなくなり、積分の意味で方程式が成り立つように近似することになります。つまり、計算機上では「誤差をある程度許容しながら」解を求めることができるのです。誤差は計算の工夫(例えばメッシュを細かくすること)によって小さくでき、理論的にも収束が保証されています。

以下の定常状態の拡散方程式を考えます。

$$\nabla \cdot (-c \nabla u) = f \quad (7c-1)$$

この式の両辺にテスト(試行)関数 v を掛けて空間積分します。

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (-c \nabla u) v = \int_{\Omega} f v \quad (7c-2)$$

以下の部分積分を

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (-c \nabla u) v = \int_{\Omega} c \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\partial\Omega} -c \nabla u \cdot \mathbf{n} v \quad (7c-3)$$

式(7c-2)に代入すると以下の式が得られます。

$$-\int_{\Omega} c \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} f v + \int_{\partial\Omega} +c \nabla u \cdot \mathbf{n} v = 0 \quad (7c-4)$$

弱形式では、式(7c-4)の第 3 項で表れるようにノイマン境界条件が自然に式に組み込まれます。それと同時に、弱形式では二階微分が一階微分に置き換わるため、より低次の補間関数(基底関数[2])でも計算が可能になります。これによって有限要素法は効率的に幅広い方程式を扱えるようになります。COMSOL では、変数 u の x 微分は u_x (あるいは $d(u, x)$) と表記されます。計算変数 u に対応するテスト関数 v は $\text{test}(u)$ 、その x 微分 v_x は $\text{test}(u_x)$ と記述します。同様に、 y 微分や z 微分についても $\text{test}(u_y)$ 、 $\text{test}(u_z)$ と表されます。これらの表記を用いることで、3 次元系における拡散方程式を弱形式としてモデル化する際

には、体積積分の被積分項を次のように入力します。すなわち、「 $-c*(test(ux)*ux+test(uy)*uy+test(uz)*uz)+f*test(u)$ 」という形で弱形式 PDE モジュールに与えることで、拡散係数 c とソース項 f を含む拡散方程式の弱形式を正しく表現できます。

時間依存の拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (-c \nabla u) = f \quad (7c-5)$$

を考えると、 $-\frac{\partial u}{\partial t}$ はソース項と等価な項であるため、弱形式は以下の式となります。

$$\int_{\Omega} (-c \nabla u \cdot \nabla v) + \int_{\Omega} (f - \frac{\partial u}{\partial t}) v + \int_{\partial \Omega} c \nabla u \cdot \mathbf{n} v = 0 \quad (7c-6)$$

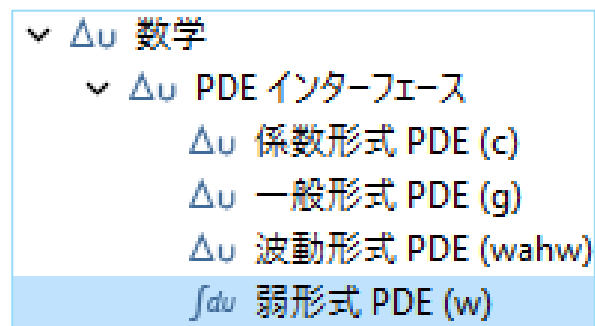
3次元系における COMSOL における拡散方程式の弱形式の記述は「 $-c*(test(ux)*ux+test(uy)*uy+test(uz)*uz)(f-ut)*test(u)$ 」という形で弱形式 PDE モジュールに与えます。ここで、 ut (または $d(u, t)$) は u の時間微分を表します。

上記の説明では、拡散方程式を弱形式化しましたが、LLG 方程式を含む任意の連続体の微分方程式を弱形式化して、COMSOL の弱形式 PDE インターフェースに組み込むことができます。

2. 例題 1: 弱形式 PDE を用いた拡散方程式の組み込み

書籍本編の 7.6.1 項で行った 1 次元拡散方程式モデリングを、弱形式 PDE インターフェースで行います。以下に、設定のポイントを記述します。完成したファイルは、補足資料 7C 付属の 7C_Diffusion equation_weak form PDE_1D.mph として参照できます。

1) フィジックス選択において、「数学」の「PDE インターフェース」のカテゴリから、「弱形式 PDE (w)」を追加します。



「弱形式 PDE(w)」にて、従属変数が「u」になっていることを確認します。

単位

従属変数	単位
無次元	1

ソース項	単位
カスタム単位	m ⁻²

離散化

従属変数

フィールド名 (1): u2

従属変数の数: 1

従属変数 (1): u

2) 「弱形式 PDE(w)」の「弱形式 PDE 1」において、「弱形式」の入力欄に、「 $-c \cdot \text{test}(u_x) \cdot u_x - (1[\text{s/m}^2] \cdot u_t - f) \cdot \text{test}(u)$ 」と入力します。ここで、書籍本編の 7.6.1 項の設定に合わせて、 $f=0$, $c=1$ としています。

弱形式 PDE (w)

- 弱形式 PDE 1
- 初期値 1
- ゼロ流束 1
- ディリクレ境界条件 1

方程式

次を仮定して方程式表示:

スタディ 1, 時間依存

$$0 = \int_{\Omega} \text{weak } \partial L$$

弱形式

weak $-c \cdot \text{test}(u_x) \cdot u_x - (1[\text{s/m}^2] \cdot u_t - f) \cdot \text{test}(u)$

3) 「ディリクレ境界条件 1」において、左端を選択して 1 を入力します。

境界選択

選択: マニュアル

1

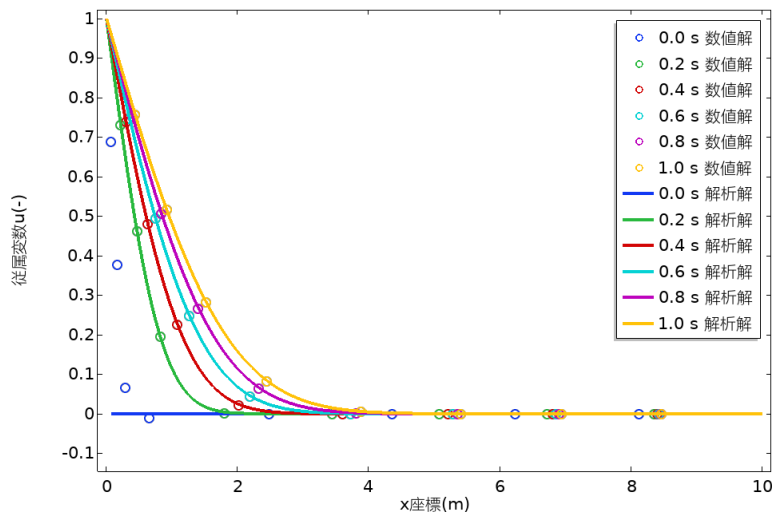
方程式

ディリクレ境界条件

☒ 既定値 u

r 1 1

残りの設定は 6.7.1 項と同様に行うと, 以下のように解が得られ, 誤差関数を用いて記述される解析解と一致することが確認できました。



3. 変分問題と物理方程式の弱形式化の類似性[3]

x の関数 u で記述される F を x で積分した関数 E を考えます。 E は関数 u の関数つまり汎関数といえます。

$$E[u(x)] = \int_a^b F(x, u, u_x) dx \quad (u_x = \frac{du}{dx}) \quad (7c-7)$$

ここで, E の極値問題を考えます。関数 u の値を摂動成分 $\varepsilon \hat{u}$ だけずらします。その時, $\delta E[u] = E[u + \varepsilon \hat{u}] - E[u]$ の差分として以下の式が得られます。 $E[u]$ が極小値を取っている場合, 差分 $\delta E[u] = E[u + \varepsilon \hat{u}] - E[u] \geq 0$ となり, ε が 0 の極限である場合, 差分は 0 に収束します。これを, 変分条件と呼び, 以下の式で表されます。

$$\delta E[u] = E[u + \varepsilon \hat{u}] - E[u] = \varepsilon \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial u} \hat{u} + \frac{\partial F}{\partial u_x} \hat{u}_x \right] dx = 0 \quad (7c-8)$$

部分積分にして被積分項が 0 になることを踏まえると, オイラー＝ラグランジュ方程式が得られます。

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) = 0 \quad (7c-9)$$

この手続きを一般的に, 変分原理といいます。 E として質点粒子の作用, x として時間 t を考え, F として質点粒子のラグランジアンを採用すれば, ニュートンの運動方程式が得られます。補足資料 7A で述べているように, 作用に対して変分原理を適用することによって古典的な運動方程式を得ることができることが知られていて最小作用の原理として知られます。また, F を系の自由エ

エネルギー密度 W とすれば, E は系全体の自由エネルギーとなり, 変分問題は自由エネルギー極小問題となります。理論的には, 得られたオイラー＝ラグランジュ方程式(7c-9)を用いて計算しますが, 変分形式を解くにあたり, COMSOL ではオイラー＝ラグランジュ方程式を用いる必要がありません。それは, 式(7c-8)において弱形式のテスト関数を変分式 $\hat{u}$ に対応させると, 弱形式(7c-4)が変分を表す汎関数(7c-8)に数学的に等価であるためです。汎関数(7c-8)の被積分項 $\frac{\partial F}{\partial u} \hat{u} + \frac{\partial F}{\partial u_x} \hat{u}_x$ を, 関数の摂動成分 $\hat{u}$ およびその x 微分値 $\hat{u}_x = \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}$ を, テスト関数 $\text{test}(u)$ および $\text{test}(u_x)$ に置き換えた式

$$\frac{\partial F}{\partial u} * \text{test}(u) + \frac{\partial F}{\partial (u_x)} * \text{test}(u_x) = 0 \quad (7c-10)$$

で弱形式に入力すれば, オイラー＝ラグランジュ方程式を用いずに変分問題を解くことができます。

4. 例題 2: 平衡状態の磁化分布の導出

本書 6.4.2 項で導出した平衡状態のブロッホ型磁壁の磁化分布の解析解を, 弱形式 PDE を用いて定式化し, 数値的に求めます。図 1 に, 概要図を示します。

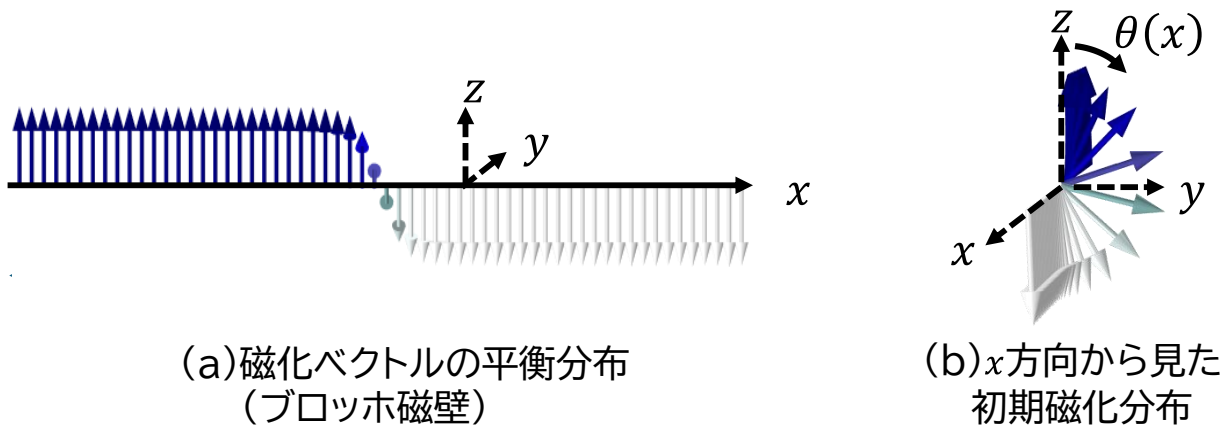


図 1 モデル概要図

磁性体の自由エネルギーを原子間交換相互作用エネルギーと磁気異方性エネルギーの和で表すと以下の式となります。

$$E[\mathbf{m}] = \int d^3\mathbf{r} A(\nabla \mathbf{m})^2 + K \sin^2 \theta \quad (7c-11)$$

ここで, A は原子間交換相互作用定数, K は磁気異方性定数を表します。 $\mathbf{m} = (m_x, m_y, m_z)$ は飽和磁化で規格化された磁化ベクトルであり, $|\mathbf{m}| = 1$ を満たします。 $\theta(x)$ は容易軸方向を z 方向とした場合の z 方向に対する磁化ベクトルの角度とします。図 (a) から $\theta(\pm\infty) = (\pi, 0)$ をみたすことがわかります。今回は図に示すように, x 方向のみに分布を持つブロッホ磁壁を考えます。磁化ベクトルは, x 成分は 0 とすると, $m_y = \sin\theta$, $m_z = \cos\theta$ となり, 拘束条件として以下が成立します。

$$m_y^2 + m_z^2 - 1 = 0 \quad (7c-12)$$

$E[\mathbf{m}]$ は以下の式となります。

$$E[m_y, m_z] = \int dy dz \int dx W(m_y, m_z) \quad (7c-13)$$

ここで, $W(m_y, m_z)$ は

$$W(m_y, m_z) = A \left(\left(\frac{\partial m_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial m_z}{\partial x} \right)^2 \right) + K m_y^2 \quad (7c-14)$$

となります。

$E[\mathbf{m}]$ をテスト関数に置き換えた変分条件を記述します。本系では計算変数が 2 変数であるため, それに対応して 2 つの変分条件が, 以下のように記述されます。

$$\frac{\partial F}{\partial m_y} * test(m_y) + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial m_y}{\partial x} \right)} test \left(\frac{\partial m_y}{\partial x} \right) = 0 \quad (7c-15)$$

$$\frac{\partial F}{\partial m_z} * test(m_z) + \frac{\partial F}{\partial \left(\frac{\partial m_z}{\partial x} \right)} test \left(\frac{\partial m_z}{\partial x} \right) = 0 \quad (7c-16)$$

変分を行って得られるオイラー＝ラグランジュ方程式から, $\theta(\pm\infty) = (\pi, 0)$ を満たすブロッホ磁壁の磁化ベクトルの角度 $\theta(x)$ の解析解として以下が得られます (本書の式 (6. 1) はこの 2 つの解の内の一つを指しています。)

$$\theta_{ana}(x) = \pm 2 * actan \left(\exp \left(\frac{x}{\lambda_a} \right) \right) \quad (\lambda_a = \sqrt{A/K}) \quad (7c-17)$$

ここで, $\lambda_a = \sqrt{A/K}$ は磁壁厚みを表し, 原子間交換相互作用と磁気異方性エネルギーの競合で決まることを表しています。COMSOL では, 自由エネルギーの被積分項に当たる自由エネルギー密度 W を弱形式 P D E に組み込んで, かつ境界条件を与えることで, 平衡状態の磁化分布ベクトルが得られます。

以下に, COMSOL 上での設定のポイントを記述します。完成したファイルは, 補足資料 7C 付属の 7C_Weak form PDE_Bloch domain wall.mph として参照できます。完成したモデルファイルのモデルビルダー構成を図 2 に示します (主要ノードのみ展開して表示)。

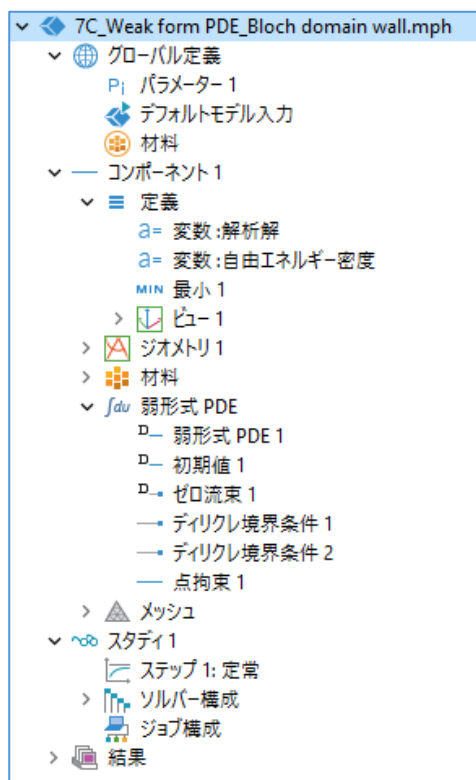


図 2 モデル概要図

1) パラメーターの設定

以下に示すように, エネルギー式(7c-14)に表れる係数を「パラメーター」で定義します。

パラメーター			
名前	式	値	説明
K	$0.388e5[A/m]$	38800 A/m	磁気異方性係数
A	$0.328e-10[A \cdot m]$	$3.28E-11 A \cdot m$	原子間交換相互作用係数
la	$(A/K)^{0.5}$	2.9075E-8 m	磁壁長さスケール

2) 従属変数の設定

「弱形式 PDE (w)」にて, 従属変数を mY, mZ と設定します。

▼ 単位

▶▶ 従属変数	単位	
無次元	1	
▶▶ ソース項	単位	
カスタム単位	m^{-2}	

> 離散化

▼ 従属変数

フィールド名 (1):

従属変数の数:

従属変数 (1):

3) 変数の設定

「変数」において, 式(7c-14)で表される自由エネルギー密度 $W(m_y, m_z)$ を定義します。ここで, mY_x および mZ_x は, それぞれ mY および mZ の x 微分 すなわち $d(mY, x)$ および $d(mZ, x)$ を表す別の記法として利用できます。

▼ 変数			
▶▶ 名前	式	単位	説明
W	$A*(mY_x^2 + mZ_x^2) + K*mY^2$	A/m	自由エネルギー-密度

4) 弱形式 PDE の設定

「弱形式」PDE (w)」の「弱形式 PDE 1」において, 微分演算子 $d(,)$ を用いて, 変分条件式(7c-15), (7c-16)を定義します。

▼ 方程式

次を仮定して方程式表示:

スタディ 1, 定常

$0 = \int_{\Omega} \text{weak } \delta L$

▼ 弱形式

weak

5) 初期値の設定

「弱形式」PDE(w)」の「初期値」において $\text{if}(x<0, 1, -1)$ と入力します。これは、磁化分布の解析解式 (7c-16)における $\pm a$ の二つの解のうち、正の解が得られるように、初期値を $x<0$ では 1, $x>0$ では-1 と設定しているためです。定常計算では、初期値は「初期時間の値」という物理的意味は持ちませんが、解は初期値を修正しながら収束していくため、複数の解が存在する場合には、初期値により近い解へ収束しやすくなります。

初期値

mY の初期値:
mY 1

mY の初期時間微分:
 $\frac{\partial mY}{\partial t}$ 1/s

mZ の初期値:
mZ 1

mZ の初期時間微分:
 $\frac{\partial mZ}{\partial t}$ 1/s

6) 境界条件の設定

「ディリクレ境界条件」として、左端として $(mY, mZ)=(0, 1)$, 右端として $(mY, mZ)=(0, -1)$ としました。これは、理論解の無限遠の条件を近似的に再現します。

ディリクレ境界条件

☒ 既定値 mY
 r_1 1

☒ 既定値 mZ
 r_2 1

ディリクレ境界条件

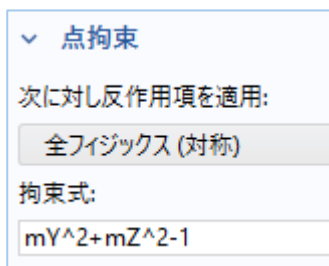
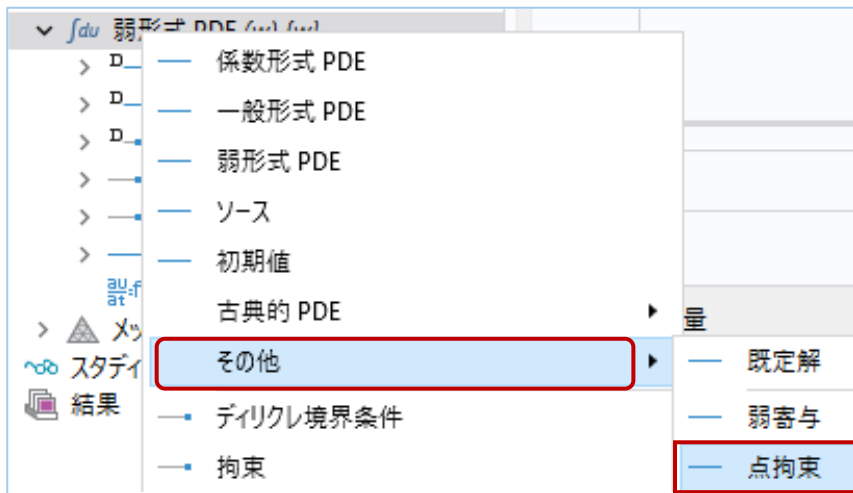
☒ 既定値 mY
 r_1 1

☒ 既定値 mZ
 r_2 1

7) 拘束条件の設定

「弱形式 PDE(w)」を右クリックし、「その他」にある「点拘束」を選択します。

「点拘束」の入力欄は入力した式を 0 にする拘束式であり、拘束式(7c-12)の左辺を入力することで、拘束式(7c-12)を定義します。



8) 定常計算

「スタディ」の「定常」にて計算を実行します。

9) 計算結果

図 3 および図 4 に示すように、磁化分布が得られ、解析解の正の解と良好に一致することがわかりました。

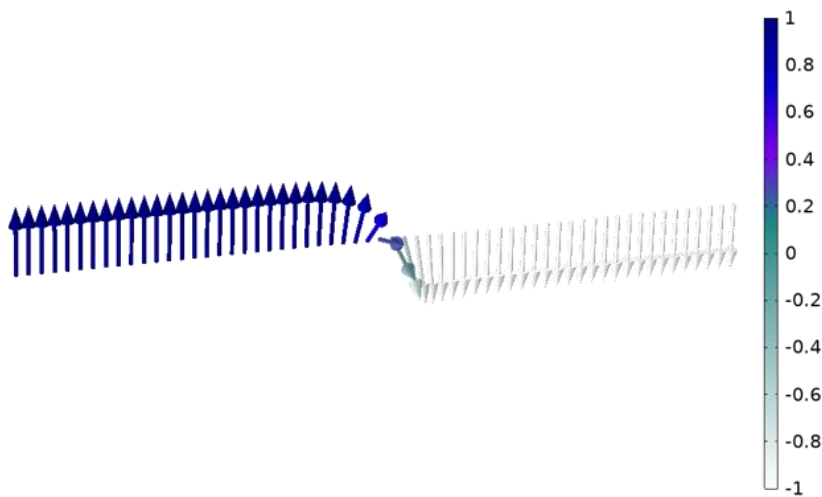


図 3 得られた磁化ベクトル分布（カラーは磁化 z 成分）

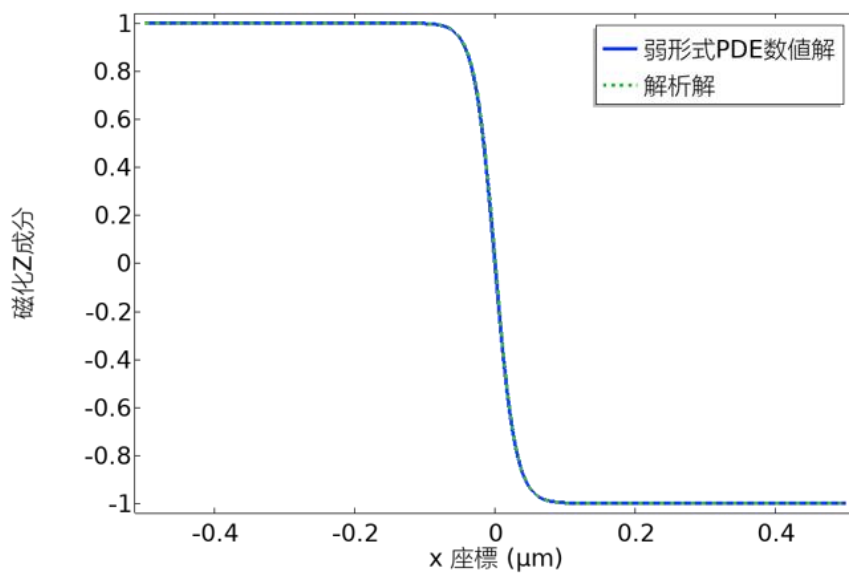


図 4 得られた磁化 z 成分分布（実線は弱形式 PDE 数値解, 点線は解析解(7c-16)

10) 補足

操作 4) で入力した式の代わりに, $\text{test}(W)$ と入力しても同じ解が得られます。

▼ 方程式

次を仮定して方程式表示:

スタディ 1 {std1}, 定常 {stat}

$$0 = \int_{\Omega} \text{weak } \partial L$$

▼ 弱形式

test(W)

weak

0

5. 例題 3: ロボットアーム先端軌道の変分最適化問題

5.1 モデル概要[4]

ロボットアーム先端の移動問題はスピントロニクスとは直接の関係はありませんが, 弱形式 PDE が「変分問題の一般的な解法」として幅広い分野で利用できることを示すために, 興味のある方に向けて紹介します。図 5 に示すように, 一方の関節位置が固定化された, 2つのアームと2つの関節を持つ 2 自由度の平面ロボットアームの運動を考えます。その姿勢は関節の回転角度の対で決定されます。関節 1 の角度を $\pi/12$ から $\pi/3$ へ, 関節 2 の角度を 0 から $3 * \pi/20$ へ変化させた時, ロボットアーム先端の移動距離が最小となるような 2 つの関節角度の軌道を変分問題として定式化し, 弱形式 PDE で解きます。

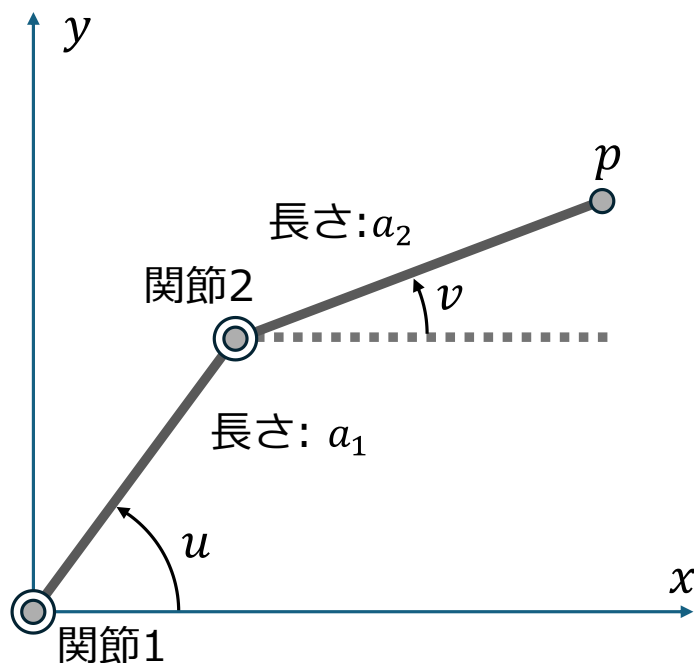


図 5 2 自由度の平面ロボットアームの概要図

図6のように、2つのアームの長さを a_1, a_2 として、2つ関節の角度をそれぞれ微小な値 $\Delta u, \Delta v$ ずらすことを考えます。ロボットアーム先端 p の移動距離 ΔL は以下の式で表されます。

$$\begin{aligned}\Delta L &= \sqrt{a_2^2 * \Delta v^2 + 2 * a_1 * a_2 * C * \Delta u * \Delta v + a_1^2 * \Delta u^2} \\ &= \sqrt{a_2^2 * \left(\frac{\Delta v}{\Delta u}\right)^2 + 2 * a_1 * a_2 * C \left(\frac{\Delta v}{\Delta u}\right) + a_1^2} \Delta u\end{aligned}\quad (7c-17)$$

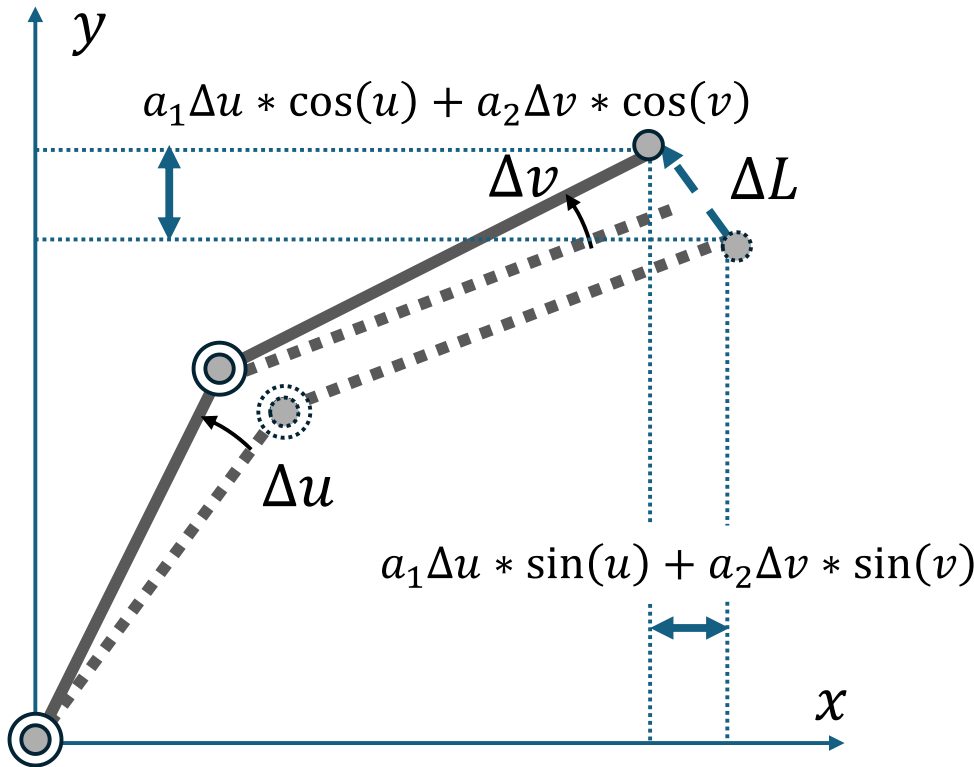


図6 ロボットアームの微小回転による微小移動距離 ΔL の導出

$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta u} = \frac{dv}{du}$ を用いて、 u を u_a から u_b まで動かした際のロボットアーム先端の移動距離 L は、 u に対する線素 F を u で積分した式で表されます。

$$L[v(u)] = \int_{u_a}^{u_b} F(u, v, v_u) du \quad \left(v_u = \frac{dv}{du}\right) \quad (7c-18)$$

$$F(u, v, v_u) = \sqrt{a_2^2 * v_u^2 + 2 * a_1 * a_2 * C * v_u + a_1^2} \quad (7c-19)$$

$$C(u, v) = \cos(u) * \cos(v) + \sin(u) * \sin(v) \quad (7c-20)$$

移動距離 L の最小値問題を求めることは、本補足資料3節で説明したように、以下の変分条件を満たすことに相当します。

$$\delta L[v(u)] = L[v + \varepsilon \hat{v}] - L[v] = \varepsilon \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial v} \hat{u} + \frac{\partial F}{\partial v_u} \hat{v}_u \right] du = 0 \quad (7c-21)$$

この変分条件を弱形式 PDE で記述すると,以下の式になります。

$$\frac{\partial F}{\partial v} * test(v) + \frac{\partial F}{\partial v_u} * test(v_u) = 0 \quad (7c-22)$$

ここで, COMSOL 上で一次元空間を用意し, 上記の弱形式を解きます。

5.2 COMSOL における解析の設定ポイントと解析結果

以下に, COMSOL 上での設定のポイントを記述します。完成したファイルは, 補足資料 7C 付属の 7C_Weak form PDE_Trajectory analysis of a robot arm.mph として参照できます。完成したモデルファイルのモデルビルダー構成を図 7 に示します (主要ノードのみ展開して表示)。

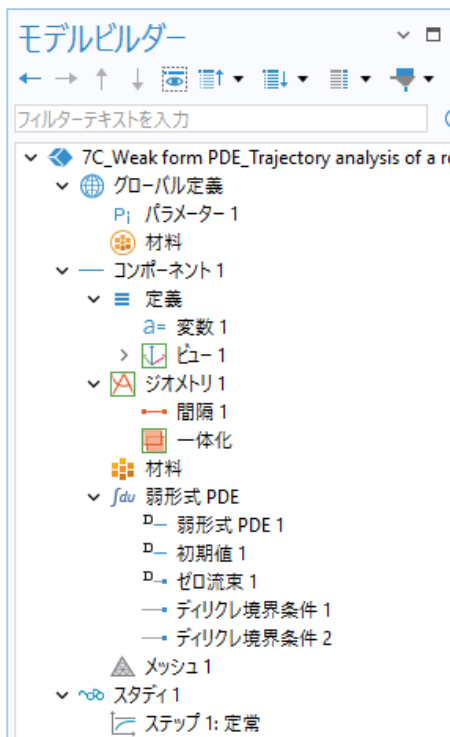


図 7 完成したモデルファイルのモデルビルダー構成

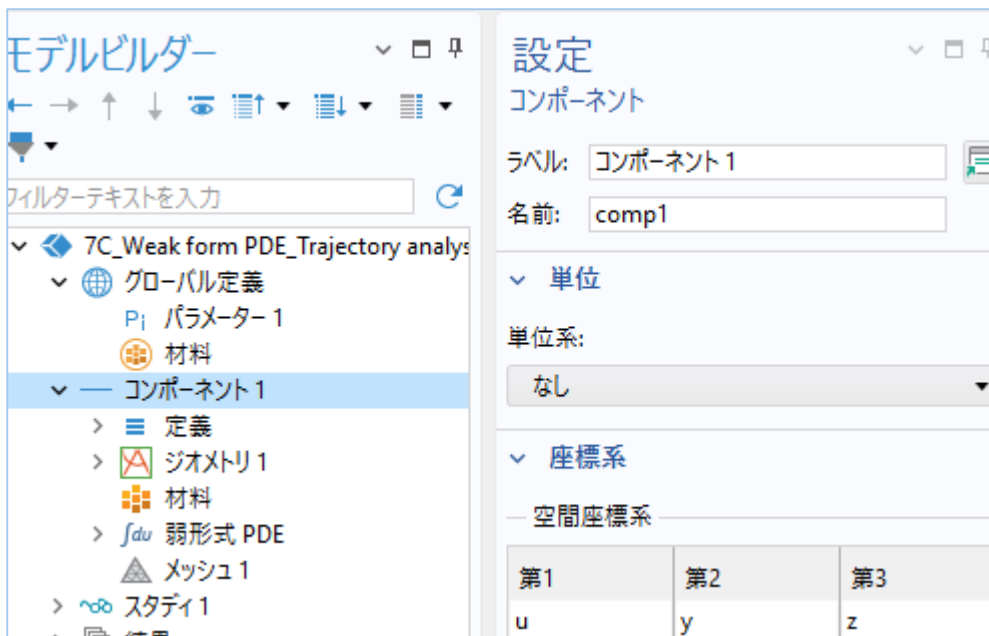
1) パラメーターの設定

以下に示すように,アームの長さや初期および最終状態の関節の角度を「パラメーター」で定義します。

パラメーター			
名前	式	値	説明
a1	1[m]	1 m	アーム 1 の長さ
a2	1[m]	1 m	アーム 2 の長さ
ua	$\pi/12$	0.2618	関節1の初期角度
ub	$\pi/3$	1.047	関節1の最終角度
va	0	0	関節2の初期角度
vb	$3\pi/20$	0.4712	関節2の最終角度

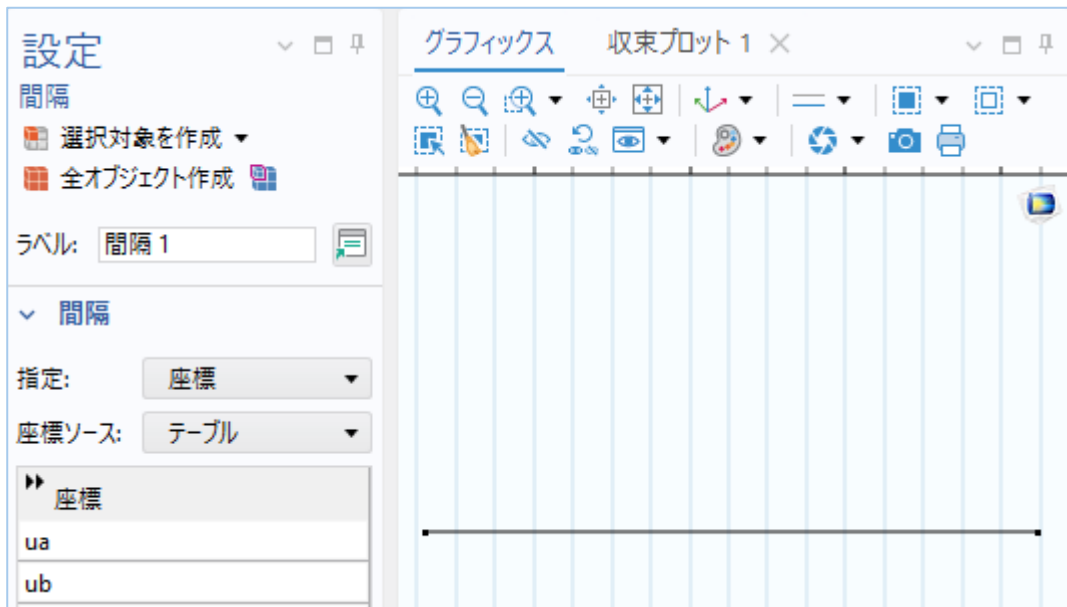
2) 空間座標系の編集

「コンポーネント 1」では, 空間座標として用いる変数を x から u に変更します。ここで u は関節 1 の回転角度を表しており, 計算上は 空間座標と同様に扱います。つまり, ロボットアームの軌道を, 関節 1 の角度 u を独立変数とする関数として定式化するために, 空間座標を u に置き換えています。それに伴って単位系: “m” を “なし” に変更します。



3) ジオメトリの設定

「ジオメトリ」の「間隔」において、座標として、 u_a , u_b を入力します。ここで、左端の値 u_a は 関節 2 の初期角度を表し、右端の値 u_b は 関節 2 の最終角度を表しています。



4) 従属変数の設定

「弱形式 PDE(w)」にて、従属変数を v と設定します。また、「単位」の「ソース項量」の単位を 1 に変更します。



5) 変数の設定

「コンポーネント 1」の「変数」において,式(7c-19)および式(7c-20)で表される変数 F および C を定義します。ここで, vu は関節 2 の角度 v を関節 1 の角度 u (空間変数) で微分したものを表します。

▼ 変数			
名前	式	単位	説明
F	$(a_2^2 \cdot vu^2 + 2 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot C \cdot vu + a_1^2)^{0.5}$		線素
C	$\cos(u) \cdot \cos(v) + \sin(u) \cdot \sin(v)$		
X_p	$a_1 \cdot \cos(u) + a_2 \cdot \cos(v)$		ロボットアームの先端x座標
Y_p	$a_1 \cdot \sin(u) + a_2 \cdot \sin(v)$		ロボットアームの先端y座標

6) 弱形式 PDE の設定

「弱形式 PDE1」において,微分演算子 $d(,)$ を用いて,変分条件式(7c-22)を定義します。

▼ 方程式

次を仮定して方程式表示:

スタディ 1, 定常

▼

$$0 = \int_{\Omega} \text{weak } \partial L$$

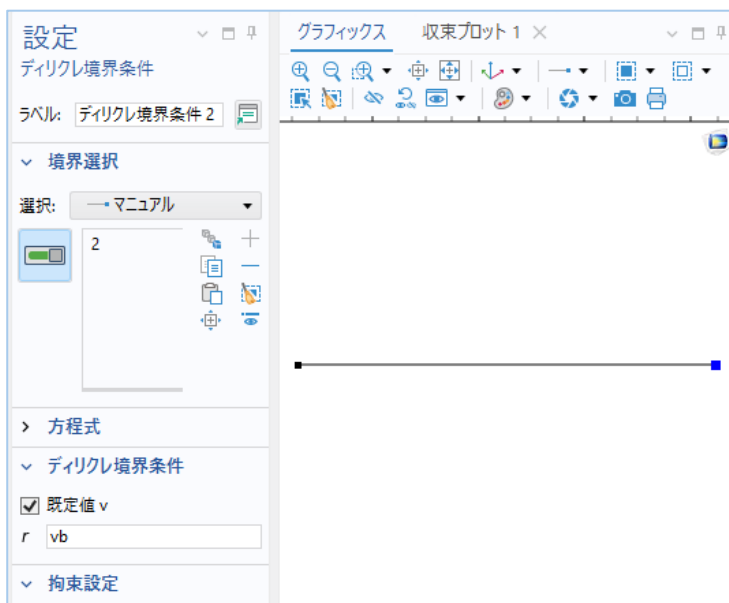
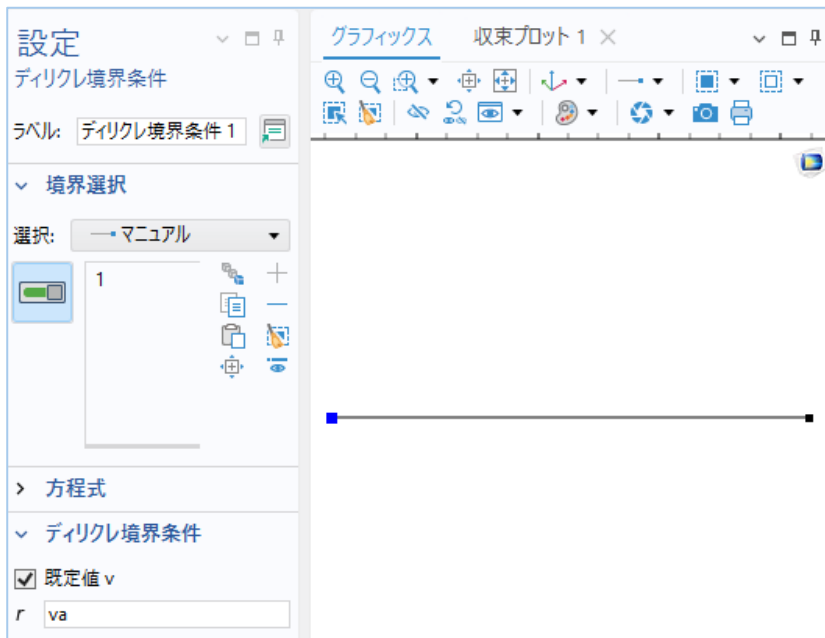
▼ 弱形式

weak

test(v)*d(F,v)+test(vu)*d(F,vu)

7) 境界条件の設定

「ディリクレ境界条件」として、左端の値を v_a 、右端の値を v_b に設定します。
ここで、左端の値 v_a は 関節 2 の初期角度を表し、右端の値 v_b は 関節 2 の最終角度を表しています。



8) 定常計算

「スタディ」の「定常」において、「スタディ拡張」の「補助スイープ」にチェックをつけて、パラメーター名： v_b を選択し、パラメーター値リストに $\text{range}(0, \pi/100, 3\pi/20)$ と入力します。

設定

定常

計算

解を更新

ラベル: 定常

スタディ設定

求解中の結果

フィジックスおよび変数選択

従属変数値

出力に保存

メッシュ選択

アダプテーションと誤差推定

スタディ拡張

補助スイープ

スイープタイプ:

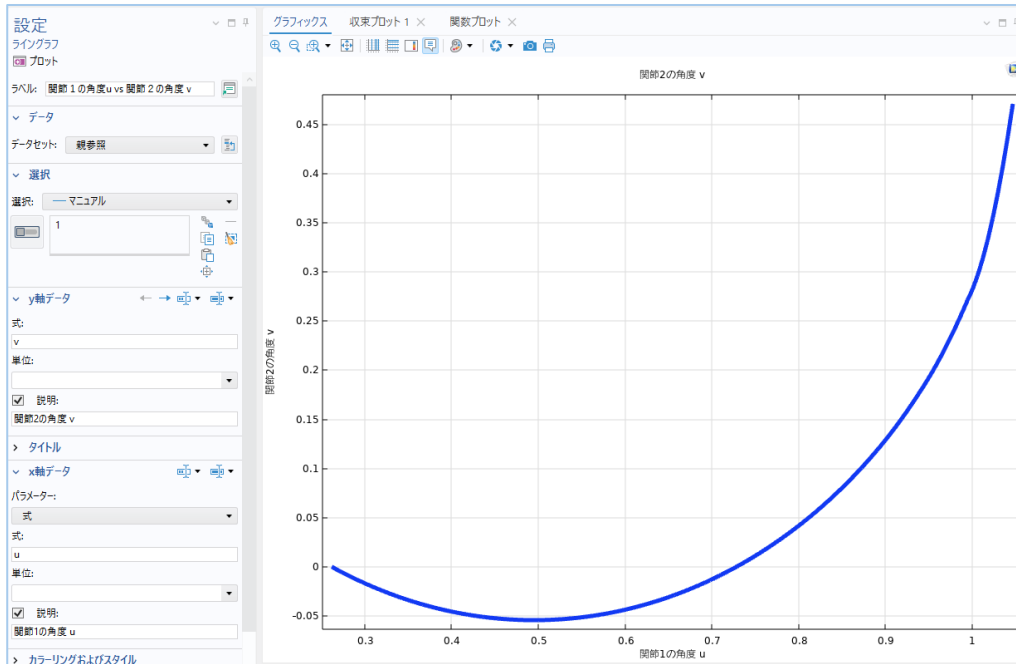
指定の組み合わせ

パラメーター名	パラメーター値リスト	パラメーター単位
vb (関節2の最終角度)	range(0,pi/100,3*pi/20)	

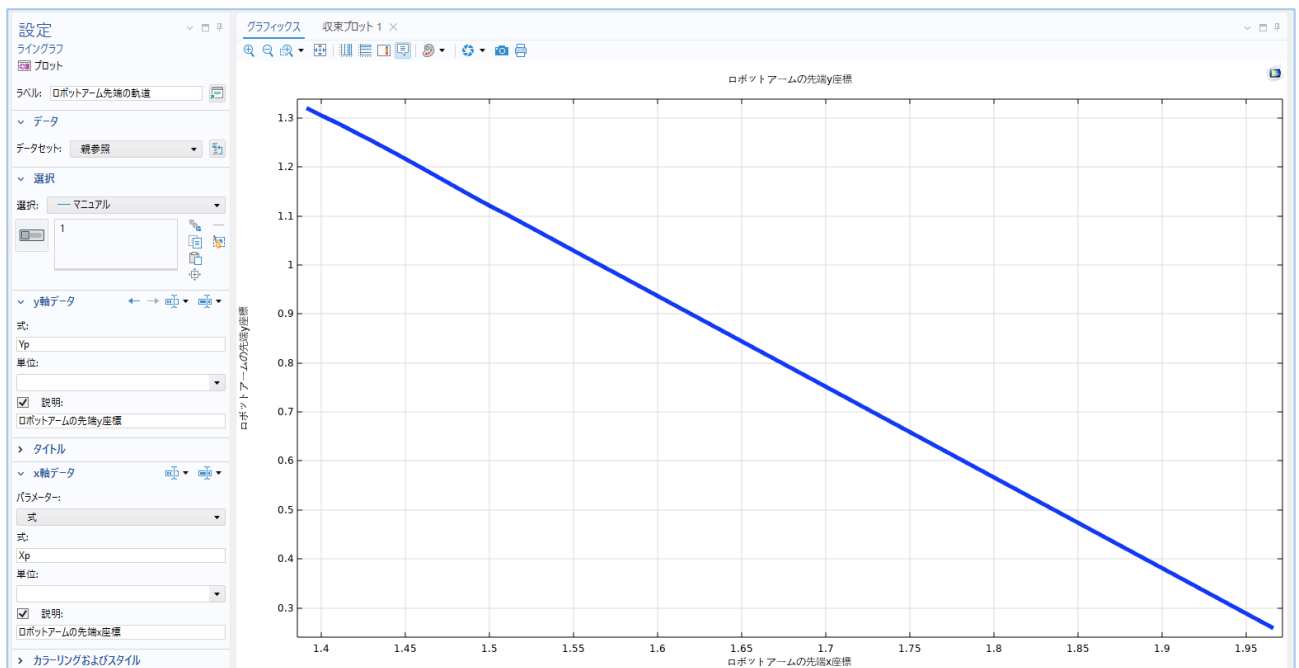
本資料 4 節の操作 5) で述べたように、定常計算では初期値を修正しながら解へ収束させるため、計算を安定して収束させるには、解に近い初期値を与える必要があります。しかし、実際にはその「解に近い初期値」が事前に分からない場合が多くあります。そこで有効なのが、パラメーターを段階的にスイープしながら計算を進める方法です。補助スイープを利用すると、vb の値を小さなステップで増加させながら、前のステップで得られた解を次のステップの初期値として自動的に利用できます。これにより、各ステップで「解に近い初期値」が自然に与えられることになり、非線形問題でも安定して収束する解を得ることができます。このことに関しては、文献[5]が参考になります。特に本例題のように、関節角度の軌道を変分問題として扱う場合、境界値 vb を直接大きく変化させると収束が難しくなることがあります。補助スイープはその問題を回避し、軌道の連続的な変化を追跡するための有効な手法となります。

9) 計算結果

「結果」の「1Dプロットグラフ」で「ライングラフ」を作成し、x軸を関節1の角度 u , y軸を関節2の角度 v に設定すると、関節1角度 u と関節2角度 v の関係を示すグラフ（以下, u - v グラフ）が得られます。この u - v グラフは、ロボットアームの先端が最短距離で移動する条件のもとで、関節1角度 u と関節2角度 v がどのような関係を持つかを表したものです。



「結果」の「1Dプロットグラフ」で「ライングラフ」を作成し、x軸を「変数」で定義した X_p , y軸を「変数」で定義した Y_p に設定すると、実空間におけるロボットアーム先端の軌道を表示することができます。



なお, 得られた $u-v$ グラフに基づいて, ロボットアームの軌道解析を COMSOL のオプションモジュールであるマルチボディダイナミクスモジュールでロボットアームの機構解析を行うと, 図 8 で示される結果が得られます。

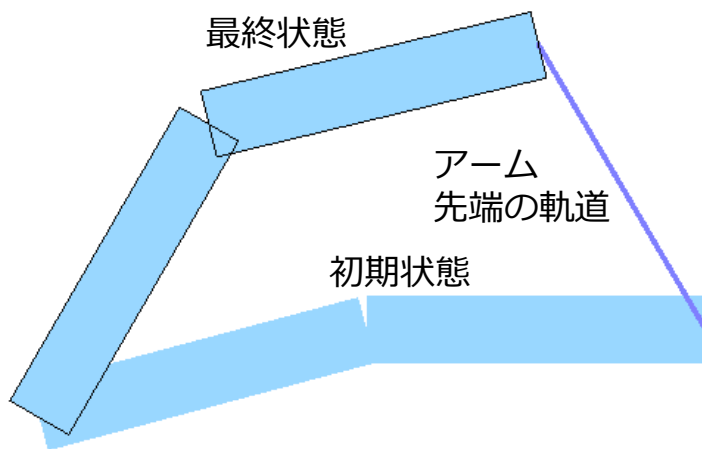


図 8 ロボットアームの機構解析

5.3 ロボットアームの軌道を「曲がった空間」で表現する方法と 理論物理学との共通点

関節 1 の角度 u と関節 2 の角度 v が張る空間をロボットアームの姿勢空間と呼びます。操作 10) では、この姿勢空間上の軌道を表す u - v 曲線を用いて、ロボットアームの最短距離の軌道を求めました。実は、このロボットの姿勢空間は 2 次元トーラス（ドーナツ形状の表面上の曲がった幾何学的空間）として表すことができます [4]。図 9 に、ロボットの姿勢空間をトーラスとして表した際のロボットアームの先端の軌道を示します。トーラスは 2 つの円周方向から構成されており、関節 1 の角度 u は大円周方向、関節 2 の角度 v は小円周方向に対応します。今回の解析で得られた u - v 曲線をこのトーラス上に射影すると、図中の青い曲線になります。これは、初期角度を表す座標点 (u_a, v_a) と最終角度を表す座標点 (u_b, v_b) の 2 点をトーラス上で最短距離で結ぶ曲線に対応し、測地線と呼ばれます。

したがって、今回行ったロボットアームの最小距離の軌道解析は、トーラスという曲がった空間における測地線（最短経路）の計算と等価になります。このような「曲がった空間」扱う数学分野はリーマン幾何学と呼ばれます。

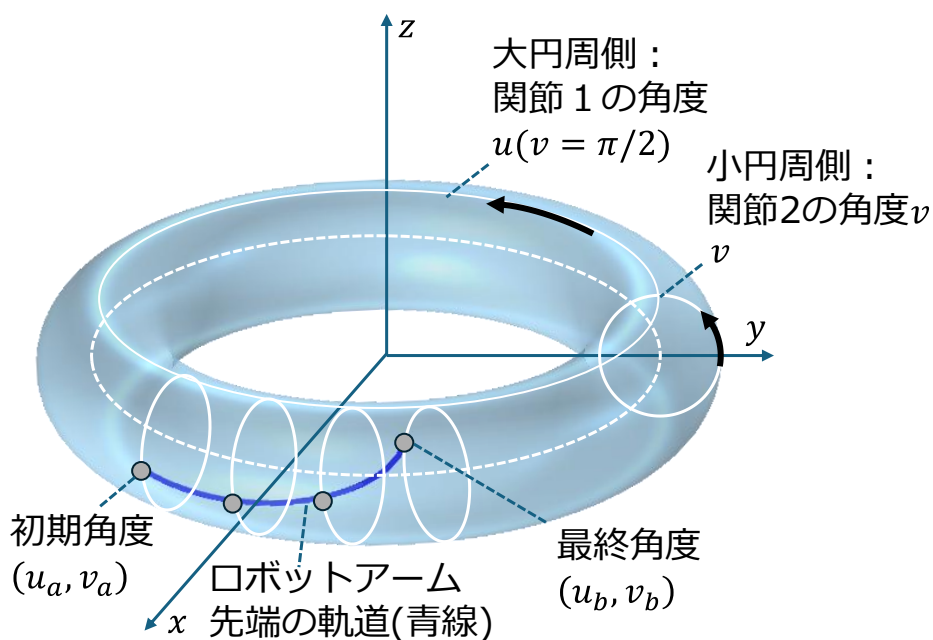


図 9 曲がった空間（トーラス）でのロボットアーム先端の軌道の記述

リーマン幾何学は、補足資料 7B で紹介したアインシュタインの一般相対性理論の基盤となった幾何学としても知られています。アインシュタインは、質量やエネルギーの存在によって“時空間が曲がる”と考えました。そして、物

体はその曲がった時空の 測地線に沿って運動すると考えました。測地線に沿った運動とは、曲がった時空の内部では「まっすぐ進んでいる」運動のことです。しかし、私たちが認識している平らな空間（ユークリッド空間）から見ると、その軌道は曲がって見えます。つまり、「重力によって物体の軌道が曲がるように見えるのは、質量によって曲がった時空で“まっすぐ進んでいる”からである」ということを、アインシュタインは数式で表現しました。一般相対性理論では、時空のゆがみは計量テンソルで表現されます。アインシュタインは、質量・エネルギーと計量テンソルの関係をアインシュタイン方程式として定式化しました[6-8]。そして、得られた計量テンソルを用いて曲がった時空における測地線を求める変分原理（運動方程式）を解くことで、重力場における物体の運動を求めることができます[6-8]。

一般相対性理論で登場する測地線は、曲がった時空における「最短経路」を与える概念です。本節で解析したロボットアームの最短軌道問題を曲がった空間で記述すると、これはそのまま測地線を求める問題に対応します。したがって、ロボットアームの運動空間における最適軌道の決定は、一般相対性理論における測地線の決定と数学的に類似した構造を持っています。このように、一般相対論のような高度な理論物理学と、ロボット工学のような実用的な工学分野が、「空間の形が決まれば、その中で最も自然な経路が決まる」という共通の原理（測地線問題）によって結びついていることは、物理や工学の面白さの一つです。

6. まとめ

本資料では、弱形式 PDE を用いて物理方程式をモデル化する方法および変分問題を解く方法を、具体例を通じて解説しました。弱形式 PDE を用いることで測地線問題やの磁性体等の物性物理分野の平衡条件を、変分問題として解くことができることを見ました。

参考文献

- [1] COMSOL ブログ : 弱形式の簡単な紹介
<https://www.comsol.jp/blogs/brief-introduction-weak-form> (2026.5.3 参照)
- [2] COMSOL ラーニングセンター : Understanding and Changing the Element Order
<https://www.comsol.jp/support/learning-center/article/understanding-and-changing-the-element-order-47301> (2026.5.3 参照)
- [3] COMSOL blog : Specifying Boundary Conditions and Constraints in Variational Problems
<https://www.comsol.com/blogs/specifying-boundary-conditions-and-constraints-in-variational-problems/> (2026.5.3 参照)
- [4] 有本 卓, 田原 健二(著):『ロボットと解析力学 (ロボティクスシリーズ 10)』コロナ社(2018).
- [5] COMSOL ラーニングセンター :
Improving Convergence of Nonlinear Stationary Model
<https://www.comsol.jp/support/learning-center/article/improving-convergence-of-nonlinear-stationary-models-66051> (2026.5.3 参照)
- [6] T. Fliessbach(著), 杉原 亮, 庄司 多津男, 南部 保貞(訳):『一般相対性理論』, 共立出版(2005).
- [7] L. ランダウ, E. リフシッツ (著) , 恒藤 敏彦(訳) :『場の古典論＝電気力学, 特殊および一般相対性理論＝ (原書第6版) , 東京図書(2022).
- [8] P. A. M. ディラック(著), 江沢洋 (訳) :『一般相対性理論』, 筑摩書房(2005).