

補足資料 7D スピンホール現象をとらえる

ここでは、スピン軌道相互作用による、スピンホール効果の微視的機構を解説します。

1. スピンホール効果の概要[1, 2]

試料に垂直方向の磁場をかけ、試料に沿った方向に電場を印加すると、電子はローレンツ力を受けて横方向に曲がり、横向きの電流が生じます。これがホール効果です。これに対してスピンホール効果は、磁性体中において外部磁場を用いずに、スピン軌道相互作用によって電子の軌道が横方向に曲がる現象を表します。スピン軌道相互作用のエネルギー（ハミルトニアン）は補足資料 6D で述べたように、スピン $\mathbf{S}$ の向きと運動量 $\mathbf{P}$ に依存しています。この特徴として、スピン $\mathbf{S}$ が反転すると相互作用 H_{so} の符号が反転することです。この結果、同じ運動量をもつスピン反転成分（ $\uparrow$ と $\downarrow$ ）は横方向に曲がる向きが逆になります。常磁性体では、スピン反転成分どうしの電子数は等しいため、横向きの電流は相殺されるものの、横方向にスピン流が発生します（図 1(a)）。これがスピンホール効果です。

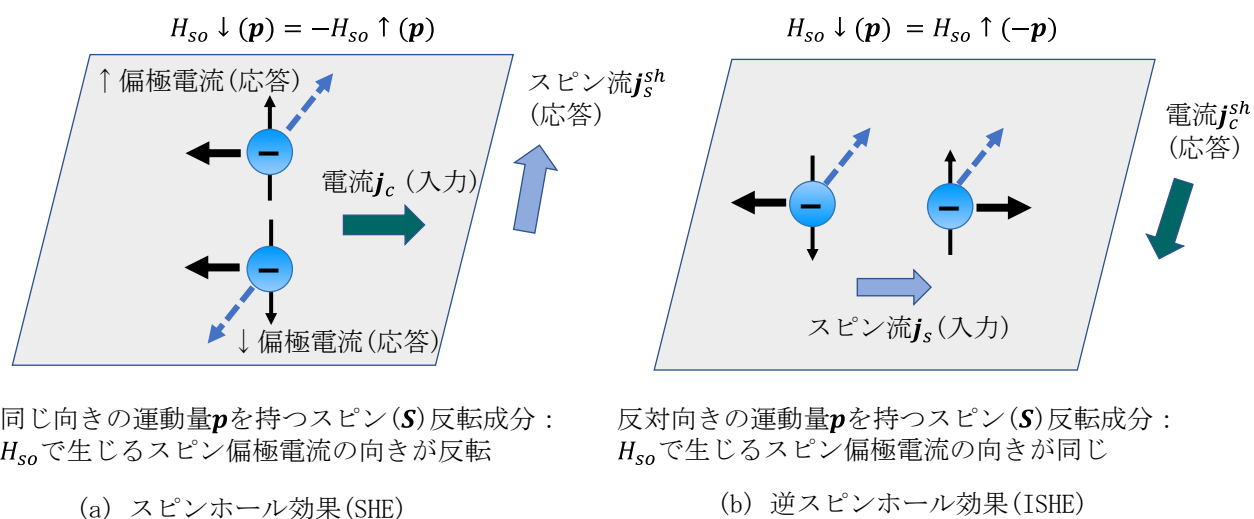


図1 スピンホール効果と逆スピンホール効果

では、電流ではなくスピン流を流した場合はどうなるでしょうか。スピン流とは、同じ運動量をもつスピン反転成分（ $\uparrow$ と $\downarrow$ ）の電子が逆向きに流れる状態であり、このとき H_{so} の符号は反転成分どうしで同じになります。その結果、スピン軌道相互作用による横方向の“曲がり”が両スピン成分で同じ向

きにそろい、横方向の電流が生じます（図 1(b)）。これが逆スピンホール効果（ISHE）です。スピンホール効果と比較される現象として、異常ホール効果があります。異常ホール効果もスピンホール効果と同様に、スピン軌道相互作用によって電子の軌道が横方向に曲げられる現象です。（注：異常ホール効果には、スピン軌道相互作用以外の機構が寄与する場合があります。）ただし、スピンホール効果が常磁性体で起こるのに対し、異常ホール効果は強磁性体で電子がスピン分極している（磁化をもつ）ことが決定的な違いです。強磁性体では、伝導電子は局在スピン（磁化）との交換相互作用（s-d 交換など）によって、磁化と同じ向きのスピン状態が低エネルギーとなり、磁化と同じ向きのスピン成分（アップスピン）が多数派になります。そのため、アップスピンとダウンスピンで横方向に曲がる向きは逆でも、多数派スピンの優勢となり、横方向の電流が生じます。これが異常ホール効果となります。

2) スピンホール効果の応用例 - スピン軌道トルク (SOT)

スピンホール効果の応用技術として、スピン軌道トルク (SOT) が注目されています。重金属層に電流を流すとスピンホール効果によってスピン流が生成され、これが隣接する強磁性層に注入されることで、スピンと磁化の交換相互作用を通じてトルクが働き、高速に磁化反転を実現できます。外部磁場を必要とせず、低消費電力で高速な磁化制御が可能なことから、次世代磁気抵抗メモリ MRAM やレーストラックメモリの基盤技術として期待されています。COMSOL のユーザー事例では、SOT が印加された磁気スキルミオンに対して、熱ゆらぎとスピン電流ノイズが運動に与える影響を解析しており、室温でもスピン電流ノイズが支配的となることが示されています。こうした解析は、高速メモリデバイスにおける誤動作の要因を理解し、より信頼性の高いデバイス設計に役立つと考えられます。なお、SOT にはラッシュバ効果に起因する成分などもあり、その微視的機構については現在も活発な議論が続いています。

3) スピンホール効果の微視的な機構[1-3]

どのようにしてスピン軌道相互作用が異常ホール効果やスピンホール効果を生み出すのかを、もう少し詳しく説明します。機構としては内因性と外因性に分類されますが、ここでは外因性の機構に焦点を当てます。外因性とは、物質中の不純物による散乱において、スピン軌道相互作用が影響を及ぼすことで生じるものです。スピン軌道相互作用は、補足資料 6D で述べたように電子

が受ける電場に由来します。固体内部では、電子が不純物ポテンシャル $u(\mathbf{r})$ によって生じる電場 $-\nabla u$ を受けてスピン軌道相互作用が現れます。

通常、スピン軌道相互作用がない系では、金属中に電圧を加えると電子は不純物と散乱しながら進みますが、その散乱は等方的であり、散乱確率は方向に依存しません（図 2(a)）。その結果、電子は平均的には印加電圧の方向にのみ進みます。それは、巨視的にはオームの法則で記述されます。一方、スピン軌道相互作用を伴う散乱では散乱が非対称となり、入射方向に対して垂直方向の散乱確率が高くなります（図 2(b)）。この散乱方向はスピンの上下で反転し、スキュー散乱と呼ばれます。

また、等方的な散乱も同時に起こりますが、このとき電子の軌道そのものが入射方向に対して垂直方向にわずかにシフトします（図 2(c)）。このシフトの向きもスピンの上下で反転し、これをサイドジャンプと呼びます。この2つの外因性機構により、電子は不純物散乱を受けるたびに入射方向とは異なる横方向にも伝搬するようになります。これらの効果はホール角 θ_{sh} に反映されます。

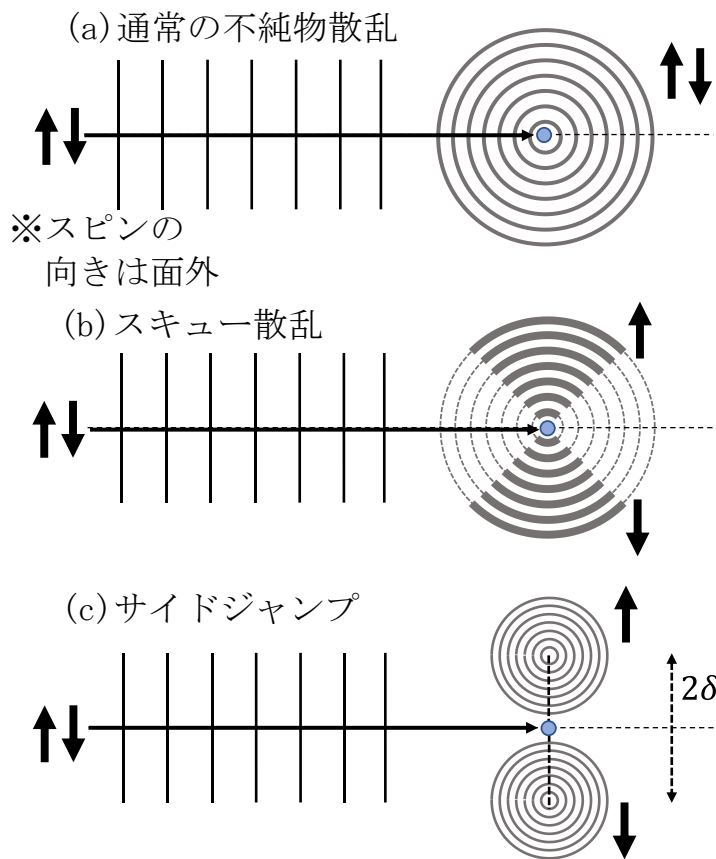


図 2 不純物散乱の量子的描像

サイドジャンプは本質的には量子力学的な現象ですが,ここでは古典的な描像でイメージをつかみます。不純物ポテンシャル $u(\mathbf{r})$ および不純物によるスピン軌道相互作用 u_{so} を含んだエネルギー（ハミルトニアン）は次のように表されます。

$$H_{so} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m_e} + u(\mathbf{r}) + u_{so} \quad (7D-1)$$

$$u_{so} = \xi_{so} \mathbf{s} \cdot [\nabla u(\mathbf{r}) \times \mathbf{p}] \quad (7D-2)$$

異常ホール効果を示す強磁性体を考える場合には,ここに伝導電子スピンと磁化との交換相互作用も加わります。このハミルトニアンを位置 $\mathbf{r}$ の時間変化に関するハイゼンベルグ方程式(補足資料 6C を参照)に代入すると,電子速度の式（演算子）が得られます。

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\mathbf{r}, H] = \frac{\mathbf{p}}{m_e} + \frac{\zeta_{so}}{\hbar} (\mathbf{s} \times \nabla u(\mathbf{r})) \quad \zeta_{so} = \frac{\hbar}{2m^2 c^2} \quad (7D-3)$$

第1項は古典力学と同様に運動量／質量の項ですが,第2項は不純物ポテンシャルの勾配 ∇u とスピン角運動量 $\mathbf{s}$ に依存する項で,異常速度項と呼ばれます。この速度式は量子力学的なものですが,参考文献[3]に従ってこれを古典的に解釈して電子軌道を考えます。簡単のため,不純物ポテンシャルの勾配が作る不均一な電場を一様な電場 ξ に置き換え,電場が存在しない領域から電場 ξ が存在する領域に電子が入射する状況を考えます(図3)。

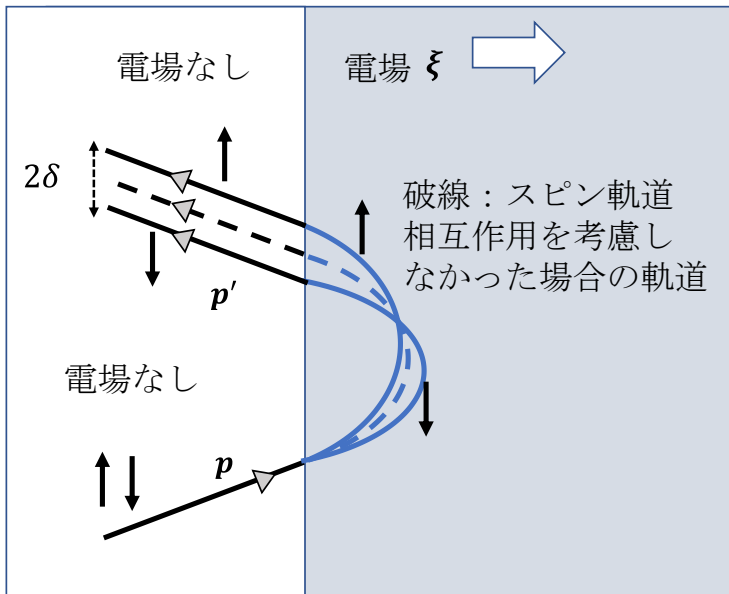


図3 スキュー散乱の古典的描像

スピンの向きは面外の上下を想定します。異常速度の結果として、電場領域を通過した電子の軌道は、スピン相互作用を考慮しない場合に比べて δ だけ横方向にシフトし、その向きはスピンの上下で反転します。このシフト δ は異常速度項 $\mathbf{v}_a = -\frac{\zeta_{so}}{\hbar}(\mathbf{s} \times \boldsymbol{\xi})$ を時間積分することで得られます。

$$\delta = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v}_a dt = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\zeta_{so}}{\hbar}(\mathbf{s} \times \boldsymbol{\xi}) dt \quad (7D-4)$$

さらに、 $d\mathbf{p} = e\boldsymbol{\xi}dt$ を用いて積分すると、 δ は次の式で表されます：

$$\delta = -\frac{\zeta_{so}}{\hbar} \mathbf{s} \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{p} = \frac{\zeta_{so}}{\hbar} \mathbf{s} \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}') \quad (7D-5)$$

この式から、入射前後の運動量ベクトルの差とスピンの向きの外積に依存することがわかります。この特殊な設定では、古典的描像で得られたシフト δ は量子力学の摂動論で計算される値と一致します（参考文献[3]）。このように、サイドジャンプ機構は古典的に言えば、電子の軌道が横方向にシフトする現象として理解できます。

3) 具体的な式の導出の方向性（発展、興味のある方向け）

最後に、スピンホール効果や異常ホール効果を記述する輸送方程式やその応答係数がどのように導かれるのかについて、参考文献に基づき、その“導出の方向性”だけを簡単に述べます。興味のある方はぜひ原典[2-4]を読んでみてください。

サイドジャンプによる電子の異常速度の平均値は、式(7D-3)で得られた速度演算子を用い、摂動論（ボルン近似）で求めた散乱波の固有ベクトルに対して平均操作を行うことで得られます。この平均化により、速度とスピンの向きに対して垂直方向に異常速度が生じることが明確になり、スピンホール角に対応するサイドジャンプの係数が式として現れます。電子の平均速度を電流密度に換算すると、本書の式(7-22)の第二項に組み込まれるサイドジャンプ項が得られます。

スキュー散乱を含む輸送方程式の導出は、通常電子輸送と同様に、半古典的にはボルツマン方程式に緩和近似を施すことで行えます。ボルツマン方程式のソース項は散乱による分布関数の変化を表し、散乱確率が入力として現れます。この散乱確率はフェルミの黄金律で近似され、散乱行列要素に不純物ポテンシャルとスピン軌道相互作用を含めることで、スピン軌道相互作用の寄与をボルツマン方程式に組み込むことができます。最終的に、スピン拡散方

程式や本書の式(7-22)の第二項に組み込まれるスキュー散乱項が得られます。

以上の方法は、量子力学の摂動論と半古典近似（ボルツマン方程式）を組み合わせ、輸送方程式やホール角などの応答係数を導くアプローチです（参考文献[4]）。これは散乱の低次の寄与を扱うものですが、より高次の寄与を取り込む方法として、量子電磁気学(QED)といった場の量子論で発展した ファインマンダイアグラムの形式を、物性物理の文脈に数学的に借用して用いる手法も存在します[2, 3]（ファインマンダイアグラムについては、補足資料 7A でも触れています。）この方法では、高次散乱の寄与を体系的に係数へ組み込むことができます。

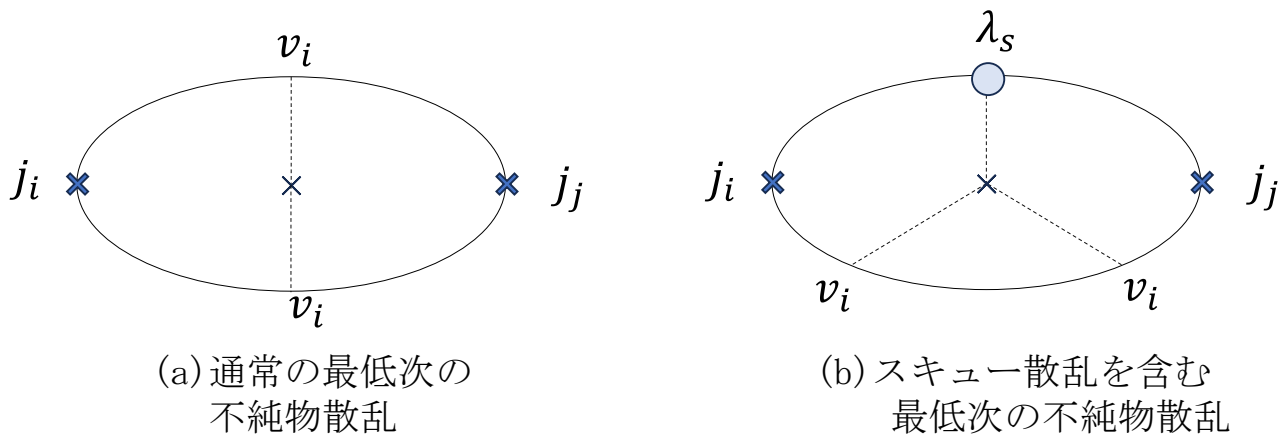


図 4 現象論的応答係数を与えるファインマンダイアグラムの例

例えば、異常ホール効果におけるスキュー散乱の最低次の寄与は図4のように表されます[2, 3]。2つの円弧は電子の伝搬を表し、右端が入力を表す電流密度 j_j 、左端が応答を表す電流密度 j_i を表します。中央の×印が不純物、点線が不純物による散乱を示します。左図はスピン軌道相互作用を含まない場合、右図はスピン軌道相互作用を含む場合の最低次のダイアグラムです。 λ_s と記された頂点がスピン軌道相互作用を伴う散乱、 v_i が通常の不純物散乱を表します。この図が示すように、スピン軌道相互作用を含む散乱1回と通常散乱2回の組み合わせが、スキュー散乱の最低次数を構成します。ファインマンダイアグラムは、不純物散乱のメカニズムを直感的に理解するだけでなく、グリーン関数を用いた理論式の導出や、応答関数・輸送係数に対する高次の寄与を体系的かつ効率的に評価するための強力な手法です。具体的な導出方法については、参考文献[2, 3]に詳しく解説されていますので、興味のある方は参照してみてください。

参考文献

- [1] 斎藤英治, 村上修一 (著) : 『スピン流とトポロジカル絶縁体 — 量子物性とスピントロニクス的发展』, 共立出版 (2014).
- [2] 多々良 源 (著) : 『スピントロニクスの物理 — 場の理論の立場から』, 内田老鶴圃 (2019).
- [3] A. Crépieux and P. Bruno : Theory of the anomalous Hall effect from the Kubo formula and the Dirac equation, *Physical Review B* **64**, 014416 (2001).
- [4] 前川 禎通, 堤 康雅 (著) : 『スピントロニクス — 21 世紀の物性』, 日本評論社 (2019).